
Kapak Konusu: Sayma

# $(1 + X)^{1/2}$

Selin Enüst Çalışkan* / *selincaliskan@gmail.com*
Ali Nesin** / *anesin@bilgi.edu.tr*

$1/(1 - X)$ gibi bir ifadeP bir polinom değildir. Görünüşe bakılırsa bir güç serisi de değildir. Ama görünüşe aldanmamalı. Kolay bir hesapla anlaşılacağı üzere,

$$(1 - X)(1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + ...) = 1$$

dir, çünkü bu çarpımda 1 dışında tüm $X^n$'ler sadeleşirler ve geriye sadece 1 kalır. Dolayısıyla,

$$1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + ...$$

güç serisi (bir anlamda, ve güçlü bir anlamda!) $1/(1 - X)$'e eşittir.

**Soru.** Bu yazıda şu soruyu sorup yanıtlayacağız: $(1 + X)^{1/2}$ de, aynen $1/(1 + X)$ gibi, bir güç serisi olarak ifade edilebilir mi? Daha matematiksel bir ifadeyle

$$f(X)^2 = 1 + X$$

eşitliğini sağlayan bir $f(X)$ güç serisi var mıdır?

Önce biraz hesapla yanıtın "evet" olduğunu göreceğiz. Ardından $f(X)$'i bulacağız. Yanıtın "evet" olması başlı başına şaşırtıcı da, $1 + X$'in karekökünün yani $f(X)$'in ifadesi - görüleceği üzere - çok daha şaşırtıcı.

**Hesap.** Böyle bir $f(X)$ güç serisi varsa, $-f(X)$ de aynı denklemi sağladığından, yukardaki denklemin, eğer varsa, en az iki çözümü vardır. İkiden fazla da çözümü olamaz, çünkü,

$$f_1(X)^2 = 1 + X = f_2(X)^2$$

ise, $(f_1(X) - f_2(X))(f_1(X) + f_2(X)) = f_1(X)^2 - f_2(X)^2 = 0$ ve gerçel katsayılı güç serileri bir tamlık bölgesi oluşturduğundan (bkz. MD-2003-II, sf. 33 Teorem 1), ya $f_1(X) = f_2(X)$ ya da $f_1(X) = -f_2(X)$.

Şimdi, $f(X)^2 = 1 + X$ denklemini sağlayan bir $f(X)$ güç serisinin olduğunu varsayalım, $f(X)$'i

$$f(X) = f_0 + f_1X + f_2X^2 + ... + f_nX^n + ...$$

olarak yazıp $f(X)^2 = 1 + X$ denkleminin sağlanması için $f_n$ katsayılarının sağlaması gereken koşullara göz atalım.

Hemen $f(X)$'in karesini alalım:

$$\begin{aligned} f(X)^2 = &f_0^2 + 2f_0f_1X + (2f_0f_2 + f_1^2)X^2 \\ &+ 2(f_0f_3 + f_1f_2)X^3 \\ &+ (2f_0f_4 + 2f_1f_3 + f_2^2)X^4 \\ &+ 2(f_0f_5 + f_1f_4 + f_2f_3)X^5 \\ &+ (2f_0f_6 + 2f_1f_5 + 2f_2f_4 + f_3^2)X^6 \\ &+ ... \end{aligned}$$

Demek ki $f(X)^2 = 1 + X$ eşitliğinin geçerli olması için yeter ve gerek koşul,

$$\begin{aligned} &f_0^2 = 1 \\ &2f_0f_1 = 1 \\ &2f_0f_2 + f_1^2 = 0 \\ &2(f_0f_3 + f_1f_2) = 0 \\ &2f_0f_4 + 2f_1f_3 + f_2^2 = 0 \\ &2(f_0f_5 + f_1f_4 + f_2f_3) = 0 \\ &2f_0f_6 + 2f_1f_5 + 2f_2f_4 + f_3^2 = 0 \\ &\quad ... \end{aligned}$$

denklemlerinin $f_0, f_1, f_2, f_3, ...$ çözümünün olmasıdır. Sonsuz tane denklem ve bilinmeyen olduğuna dikkatinizi çekerim. Daha da önemlisi, her denklemde önceki denklemlerden sadece bir fazla bilinmeyen olması. Bu, işimizi çok kolaylaştıracak.

Birinci denklemden başlayarak çözmeye çalışalım. Birinci denklem $f_0^2 = 1$ diyor. Bunun iki değişik çözümü var: 1 ve –1. İkisinden birini alalım, diyelim $f_0 = 1$. Göreceğimiz üzere, bu seçimden sonra geri kalan denklemlerin tek bir $f_i$ çözümü olacak.

Gelelim ikinci denkleme: $2f_0f_1 = 1$. Ama $f_0 = 1$. Demek ki $2f_1 = 1$ ve $f_1 = 1/2$.

Sıra üçüncü denklemde: $2f_0f_2 + f_1^2 = 0$. Yukarda bulduğumuz $f_0 = 1$ ve $f_1 = 1/2$ değerlerini bu denklemdeki yerlerine koyarsak, $2f_2 + 1/4 = 0$, yani $f_2 = -1/8$ buluruz.

Sıra dördüncü denklemde: $f_0f_3 + f_1f_2 = 0$ (sadeleşmiş hali). Yukarda bulduğumuz $f_0 = 1$, $f_1 = 1/2$ ve $f_2 = -1/8$ değerlerini bu denklemdeki yerlerine koyarsak, $f_3 = 1/16$ buluruz.

Beşinci denklem $2f_0f_4 + 2f_1f_3 + f_2^2 = 0$ diyor. Yukarda, $f_0 = 1$, $f_1 = 1/2$, $f_2 = -1/8$ ve $f_3 = 1/16$ değerlerini bulmuştuk. Bu değerleri beşinci denkleme yerleştirelim: $2f_4 + 2(1/2)(1/16) + (-1/8)^2 = 0$ buluruz, yani $f_4 = -5/128$ buluruz.

---

* Georgia Institute of Technology'de doktora öğrencisi.
** İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.

Bu kadar hesap yeter. $f_0 = 1$, $f_1 = 1/2$, $f_2 = -1/8$, $f_3 = 1/16$, $f_4 = -5/128$ bulduk. Belli ki devam edersek her $f_n$'yi bulabileceğiz. Demek ki sorumuzun yanıtı "evet".

**Önsezi.** Problemimizi anımsayalım:

$$f(X)^2 = 1 + X$$

denklemini sağlayan $f(X)$'i bulmak istiyoruz, yani bir anlamda $(1 + X)^{1/2}$'i bulmak istiyoruz. 1/2 yerine $n$ yazalım: $n = 1/2$ için, $(1 + X)^n$'yi bulmak istediğimiz çıkıyor.

Eğer $n$ bir doğal sayı olsaydı, $(1 + X)^n$'yi bulmak çok kolay olurdu:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{i}x^i + \ldots + x^n.$$

Bu ifadeyi değiştirmeden başka türlü yazalım:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Şimdi can alıcı soruyu soralım: Acaba $n$ doğal sayıları için geçerli olan bu formül, kesirli sayılar için de geçerli mi? Hatta, bırakalım tüm kesirli sayıları, sadece $n = 1/2$ kesirli sayısı için geçerli mi? Bize sadece bu sonuç gerekiyor.

Bakalım ilk katsayılar biraz önce bulduğumuz 1, 1/2, −1/8, 1/16, −5/128 katsayılarıyla uyuşuyor mu?

$$\frac{1/2}{1!} = 1/2,$$

$$\frac{(1/2)(1/2-1)}{2!} = -1/8,$$

$$\frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{3!} = 1/16,$$

$$\frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)(1/2-3)}{4!} = -5/128.$$

Birincisi dışında sayılar uyuşuyor! Galiba doğru... Galiba gerçekten de $(1 + X)^{1/2}$'nin "açılımı"nın genel teriminin katsayısını,

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

ifadesinde $n = 1/2$ alarak elde ediyoruz, yani galiba, $f_0 = 1$ ve $k \geq 1$ için,

$$f_k = \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)\ldots(1/2-k+1)}{k!}$$

$$= (-1)^{k-1}\frac{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1)}{2^k k!} = \frac{1}{2k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{4^k}\binom{2k}{k}.$$

**Kanıt.** Biraz uzun sürecek, bir önceki yazıda yaptıklarımızı kullanacağız.

Birkaç tanımla başlayalım: $f_0 = 1$ ve her $k \geq 1$ için, $f_k$ bir üstteki formüldeki gibi olsun. Ayrıca $f$ güç serisini,

$$f = \textstyle\sum_{k\geq 0} f_k X^k$$
$$= 1 + X/2 - X^2/8 + X^3/16 - 5X^3/128 + \ldots$$

olarak tanımlayalım. $f^2 = 1 + X$ eşitliğini kanıtlayacağız.

Önce $f_k$'ler arasında tümevarımsal bir ilişki bulalım. $f_k$'nin tanımından, kolayca, $k \geq 1$ için,

$$2(k+1)f_{k+1} = -(2k-1)f_k$$

ilişkisi çıkar. Eşitliğin her iki tarafını da $X^k$ ile çarpıp toplayalım.

$$2\textstyle\sum_{k\geq 1}(k+1)f_{k+1}X^k = -\sum_{k\geq 1}(2k-1)f_kX^k.$$

Buna hafif bir rötuş yaparsak, kolay bir hesapla,

$$2\textstyle\sum_{k\geq 0}(k+1)f_{k+1}X^k - 2f_1$$
$$= -2X\textstyle\sum_{k\geq 1}kf_kX^{k-1} + \sum_{k\geq 0}f_kX^k - f_0$$

elde ederiz. Ama,

$$f' = \textstyle\sum_{k\geq 1}kf_kX^{k-1}$$

(bkz. sayfa 35) ve ayrıca $f_0 = 1$ ve $f_1 = 1/2$. Bunlarla birlikte, yukardaki denklemden,

$$2f' = -2Xf' + f,$$

yani

$$f = 2(1 + X)f'$$

elde ederiz. Bir "diferansiyel denklemle" karşı karşıyayız. Bu denklemi çözmek için biraz daha hesap yapacağız.

$$g = f^2$$

olsun. Yukardaki eşitliği gözönüne alarak, $g$'nin türevini alalım:

$$g' = 2ff' = f^2/(1 + X) = g/(1 + X),$$

yani $g'(1 + X) = g$. Her iki tarafın da türevini alırsak,

$$g''(1 + X) + g'(1 + X)' = g'$$

buluruz, sadeleştirerek $g''(1 + X) = 0$ elde ederiz. Güç serileri bir tamlık bölgesi oluşturduğundan, bu bize $g'' = 0$ verir. Yani, belli bir $a$ sabiti için, $g' = a$. Dolayısıyla belli bir $b$ sabiti için $g = b + aX$. Yani $f^2 = b + aX$. Ama $f$'nin ilk katsayılarını biliyoruz:

$$f = 1 + X/2 - X^2/8 + X^3/16 - 5X^3/128 + \ldots$$

ve karesinin ilk iki terimini hesaplayabiliriz:

$$b + aX = f^2 = (1 + X/2 - \ldots)^2 = 1 + X + \ldots$$

Demek ki $a = b = 1$. Yani,

$$f^2 = b + aX = 1 + X.$$

İstediğimizi kanıtladık. □

Sonuç:

$$1 + X = \left(\textstyle\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{4^k}\binom{2k}{k}X^k\right)^2.$$ ♠