Kapak Konusu: Sayma

Doğuran Fonksiyonlar

Emine Şule Yazıcı* / *yazicisule@hotmail.com*

Doğuran fonksiyonlar, bir anlamda ayrık matematikle sürekli matematik arasında köprü vazifesi görürler ve uygulamada çok işe yararlar.

Herbert S. Wilf'in bir benzetmesine göre, doğuran fonksiyonlar, sergilemek üzere sayı dizilerini astığımız çamaşır ipleridir.

n, 0'la sonsuz arasında değişirken $(a_n)_n$ dizisinin ***doğuran fonksiyonu***

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

ya da daha tıkız bir ifadeyle,

$$f(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

"biçimsel serisi" olarak tanımlanmıştır. Burada, "biçimsel" terimini, sonsuz toplamın bir sayı ya da fonksiyon olmadığını, sadece "anlamsız" bir ifade olduğunu belirtmek için kullanıyoruz. Bir başka ifadeyle, $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ "toplamı" analitik değil cebirsel hatta biçimsel bir ifadedir, dolayısıyla bu tür ifadelerden sözederken serinin yakınsak olup olmadığını kontrol etmemiz gerekmez. Zaten, serideki x bir sayı olmadığından, serinin yakınsak olup olmaması söz konusu bile olamaz.

MD-2004-II, sayfa 32-38'te ve geçen yazıda bunlardan "güç serileri" adıyla sözedilmişti, biz, "doğuran fonksiyon" terimini yeğleyeceğiz.

Bu şekilde tanımlanmış iki seri yalnız ve ancak aynı katsayı dizilerine sahip olduklarında birbirine eşittirler, yani $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ ise, her n için $a_n = b_n$'dir. Ayrıca bu seriler aynen polinomlar gibi toplanıp çarpılırlar.

Örnek 1. Basit bir örnek olarak, bütün elemanları 1'den oluşan $(a_n)_n = (1)_n$ dizisini ele alalım, yani her n için $a_n = 1$ olsun. $(1)_n$ dizisinin doğuran fonksiyonu

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

dir.

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots) = 1$$

olduğundan, $(1)_n$ dizisinin doğuran fonksiyonu $1 - x$ polinomunun (biçimsel serisinin ya da doğuran fonksiyonunun demek daha doğru olabilir) tersidir, dolayısıyla bu doğuran fonksiyonu $1/(1 - x)$ olarak yazabiliriz.

Benzer şekilde,

$$1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^nx^n + \ldots = 1/(1 + x)$$
$$1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots = 1/(1 - x^2)$$
$$1 + 2x + 4x^2 + \ldots + 2^nx^n + \ldots = 1/(1 - 2x)$$

eşitlikleri gösterilebilir.

Örnek 2. Bir diğer ilginç örnek olarak Fibonacci sayılarını verebiliriz. Daha önce MD'de birkaç kez gördüğümüz Fibonacci sayılarını anımsatalım:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Her Fibonacci sayısı kendisinden önce gelen iki Fibonacci sayısının toplamıdır. f_n, n-inci Fibonacci sayısı olsun. Fibonacci sayıları aşağıdaki tümevarımsal ilişkiyi sağlarlar.

$$f_0 = 0$$
$$f_1 = 1$$
$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \ (n \geq 1).$$

Fibonacci sayılarına doğuran fonksiyonlar gözlüğüyle bakarsak n-inci fibonacci sayısının,

$$\frac{x}{1 - x - x^2}$$

fonksiyonunun güç serisi açılımındaki, x^n teriminin katsayısı olduğunu görebiliriz. (Bkz. MD-2004-II, sayfa 34).

Şimdi doğuran fonksiyonların sayma problemlerinde kullanımlarına birkaç örnek verelim.

Örnek 3. Önce basit bir sayma problemiyle başlayalım. $\{A, B, C\}$ kümesinden 4 harfli bir kombinasyon seçmek istediğimizi varsayalım. A en fazla bir kere, B en fazla iki kere ve C de en fazla üç kere kullanılabiliyor olsun. Bu kısıtlamaya uyan sadece 5 değişik durumun

$A, B, B, C,$
$B, B, C, C,$
$A, B, C, C,$
$B, C, C, C,$
A, C, C, C

* Queensland Üniversitesi Matematik bölümü ziyaretçi öğretim üyesi.

olduğunu kolayca görebiliriz. Bu kolay problemi bir de doğuran fonksiyonları kullanarak çözelim.

Her harf için, o harfin kaç kez kullanılabildiğini belirten bir polinom yazalım.

$1 + A$ polinomu, A'nın 0 ya da 1 kez kullanılabileceğini belirtsin,

$1 + B + B^2$ polinomu, B'nin 0, 1 ya da 2 kez kullanılabileceğini belirtsin,

$1 + C + C^2 + C^3$ polinomu, C'nin 0, 1, 2 ya da 3 kez kullanılabileceğini belirtsin.

Şimdi bu üç polinomu,

$$(1 + A)(1 + B + B^2)(1 + C + C^2 + C^3)$$

olarak çarptığımızda, çarpımın açılımı, problem kısıtlamalarına uygun A, B ve C elemanlarını kullanarak oluşturabileceğimiz bütün k elemanlı kümeleri gösterir. Örneğin, açılımdaki AB^2C^2 terimi içinde 1 tane A, 2 tane B ve 2 tane C olan 5 elemanlı kümeyi simgeler.

Bu çarpımın dördüncü dereceden terimleri,

$$AB^2C,\ B^2C^2,\ ABC^2,\ BC^3,\ AC^3$$

dir ve bu terimlerin her biri biraz önce bulduğumuz beş çözüme tekabül eder.

Problem bizden beş değişik durumu teker teker sıralamamızı istemediğinden kombinasyon sayısını bulmak için doğuran fonksiyon olarak

$$(1 + x)(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3)$$

fonksiyonunu kullanmak daha ekonomik olacaktır. Bu fonksiyonun açılımı

$$1 + 3x + 5x^2 + 6x^3 + 5x^4 + 3x^5 + x^6 + 0x^7 + 0x^8 + \ldots$$

polinomunu verir. Burada x^4 teriminin katsayısının problem kısıtlamalarına uygun 4 elemanlı küme sayısını (yani 5'i) verdiğini görüyoruz.

Eğer A, B ve C harflerini kaç kez kullanacağımız konusunda bir kısıtlama olmasaydı, o zaman, $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ güç serisini kendisiyle üç kez çarpıp, yani $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^3$ işlemini yapıp, örneğin beş elemanlı kaç kombinasyon olduğunu bulmak için çarpımdaki x^5'in katsayısına bakmamız gerekirdi.

Örnek 4. Bu örnekte doğuran fonksiyonların, dizilerin n-inci terimi için genel kural bulunmasında nasıl kullanıldığını görmeye çalışalım.

Diyelim ki elimizdeki $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ dizisi,

$$a_0 = 0$$
$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n \geq 0)$$

ilişkisini sağlıyor. Doğuran fonksiyonları kullanarak bu dizinin n-inci terimi için genel bir formül bulacağız.

Önce dizinin ilk birkaç terimini hesaplayarak genel terimi tahmin etmeye çalışalım. Kolaylıkla hesaplanacağı üzere,

$$0, 1, 3, 7, 15, 31, \ldots$$

buluruz. Bunlar, 2'nin güçlerinden 1 eksik olan sayılar. Bu aşamada $a_n = 2^n - 1$ eşitliğini tahmin edebilir ve bu tahminimizi tümevarımla kanıtlayabiliriz. Fakat biz aynı sonuca doğuran fonksiyonları kullanarak ulaşmak istiyoruz.

$$A(x) = \textstyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

olsun. Verilen ilişkiden yararlanarak

$$\textstyle\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^n = \sum_{n\geq 0} (2a_n + 1)x^n$$

eşitliğini elde ederiz. $a_0 = 0$ olduğundan eşitliğin sol tarafı $A(x)/x$ olarak yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafı,

$$2A(x) + \textstyle\sum_{n\geq 0} x^n = 2A(x) + 1/(1 - x)$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak,

$$A(x)/x = 2A(x) + 1/(1 - x)$$

eşitliğini $A(x)$ için çözdüğümüzde,

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

sonucuna ulaşırız. Şimdi $A(x)$'in bu ifadesinin kısmi kesir açılımını kullanırsak,

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = x\left[\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\right]$$
$$= x\left[2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 1)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)x^n$$

buluruz. Artık x^n'nin katsayısının, yani a_n'nin bütün $n \geq 0$ için $2^n - 1$ olduğu kolayca görülebilir.

Verdiğimiz örneklerde çözümü nerdeyse hiç işlem yapmadan da tahmin edebilirdik. Ama problemler çok daha zorlaşsa bile aynı yöntem aynı kolaylıkla uygulanıp yanıt bulunabilir. ♣