Kapak Konusu: Sayma

Cebirsel Türev

Saygı Duyar

Türev, 17inci yüzyılda bazı geometrik ve analitik problemleri çözmek için, birbirinden bağımsız olarak Newton ve Leibniz tarafından bulunmuştur. Türevi bu bağlamından soyutlayarak çok ilginç ve çok kullanışlı bir teori elde edebiliriz. Bu yazıda bu konuya değinip sonraki yazılarda kullanacağımız bazı olguları kanıtlayacağız.

Polinom. Polinom denen şey,

$$1 + 2X - 4X^2 + 3X^4$$

gibi sonlu bir ifadedir. Örnekteki polinomun ilk katsayıları sırasıyla 1, 2, –4, 0 ve 3'tür. Sonraki katsayıların 0 olduklarını söyleyebiliriz. Genel olarak, bir ***polinom***, $f_0, f_1, ..., f_n$ sayıları için,

$$f_0 + f_1X + f_2X^2 + ... + f_nX^n$$

biçiminde yazılan sonlu bir ifadedir. Önceki sayılarımızda polinomları oldukça ayrıntılı gördüğümüz için polinom konusunu kısaca geçiştiriyoruz.

Dikkat: Bir polinomda X^{-1} ya da $X^{1/2}$ gibi ifadeler olamaz, bir polinomda X^5, X^{17} gibi X'in sadece doğal sayı güçleri belirebilir.

Polinomun $f_0, f_1, ..., f_n$ katsayıları gerçel sayı olabilecekleri gibi herhangi bir halkadan[1] da olabilirler. Ama bu yazıda katsayılarımız hep gerçel sayı olacaklar. Gerçel katsayılı polinomlar kümesi $\mathbb{R}[X]$ olarak gösterilir.

Polinomların Türevleri. Eğer $f(X)$ polinomu,

$$f(X) = f_0 + f_1X + f_2X^2 + ... + f_nX^n$$

ise, bu polinomun ***türev***ini,

$$f'(X) = f_1 + 2f_2X + 3f_3X^2 + ... + nf_nX^{n-1}$$

olarak tanımlayalım. Yani, $f(X) = \sum_k f_kX^k$ ise

$$f'(X) = \sum_k kf_kX^{k-1}$$

olsun. Örnek: $(1 + 2X - 3X^4)' = 2 - 12X^3$.

1 Geçen sayılarda halkalardan sık sık sözetmiştik: Bir ***halka***, üstünde toplama ve çarpma adı verilen ve "doğal" birkaç kurala uyan iki işlemin tanımlandığı bir kümedir. Örneğin $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ birer halkadır. Katsayıları belli bir R halkasında olan polinomlar kümesi de bir halkadır; bu halka $R[X]$ olarak yazılır. Bu yazıda halkalardan sözetmeyeceğiz.

2 Eğer katsayıların alındığı halkanın özniteliksel sayısı (yani karakteristiği, bkz. MD-2004-II, sayfa 25) 0 değilse (örneğin $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkalarında), bu önsav yanlıştır.

Görüldüğü gibi tanım biçimsel; analizle, fonksiyonların grafiğiyle, teğetlerin eğimiyle filan hiç ilgisi yok.

Kanıta bile ihtiyacı olmayan şu basit olguyu bir sonraki yazımızda can alıcı bir noktada kullanacağız:

Önsav 1. (i) *f bir polinom ve $f' = 0$ ise o zaman f sabit bir polinomdur, yani gerçel bir a sayısı için $f = a$'dır.*

(ii) *f bir polinom ve gerçel bir a sayısı için $f' = a$ ise o zaman gerçel bir b sayısı için $f = b + aX$'tir*[2].

Önsav 2. *Eğer $a, b \in \mathbb{R}$ ve f ve g iki polinomsa, o zaman,*

$$(af)' = af'$$

ve

$$(f + g)' = f' + g',$$

ya da bir başka deyişle,

$$(af + bg)' = af' + bg'.$$

Kanıt: Son derece basit, tanımın kendisinden çıkıyor. $f = \sum_k f_kX^k$ ve $g = \sum_k g_kX^k$ olsun. O zaman, bir yandan,

$$af + bg = a(\sum_k f_kX^k) + b(\sum_k g_kX^k)$$
$$= \sum_k (af_k + bg_k)X^k$$

ve türevin tanımından dolayı,

$$(af + bg)' = \sum_k k(af_k + bg_k)X^{k-1}.$$

Öte yandan, $f = \sum_k f_kX^k$ ve $g = \sum_k g_kX^k$ olduğundan, gene türevin tanımından dolayı,

$$f' = \sum_k kf_kX^{k-1} \text{ ve } g' = \sum_k kg_kX^{k-1}.$$

Dolayısıyla,

$$af' + bg' = a(\sum_k kf_kX^{k-1}) + b(\sum_k kg_kX^{k-1}).$$

Demek ki $(af + bg)' = af' + bg'$. □

Şimdi biraz daha ciddi bir önsav:

Önsav 3. *Eğer f ve g iki polinomsa, o zaman,*

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Kanıt: Kanıtlamak istediğimiz eşitliğin sol ve sağındaki ifadeler Önsav 2'den dolayı g'ye göre toplamsal olduğundan (yani kanıtlamak istediğimiz eşitlik g_1 ve g_2 polinomları için doğruysa, her

a_1 ve a_2 sayısı için, $a_1g_1 + a_2g_2$ polinomu için de doğrudur) ve g polinomu aX^k türünden "monom"ların toplamı olduğundan, eşitliği $g = X^k$ için kanıtlamak yeterli. Bundan böyle $g = X^k$ eşitliğini varsayalım. Ama eşitlik f'ye göre de toplamsal. Demek ki $f = X^l$ eşitliğini de varsayabiliriz. Dolayısıyla, artık,

$$(X^kX^l)' = (X^k)'X^l + X^k(X^l)'$$

eşitliğini kanıtlamalıyız, ki bu da çok kolay bir hesapla çıkar. □

Alıştırmalar.

1. Eğer f bir polinom ve n bir doğal sayıysa, $(f^n)' = nf^{n-1}f'$ eşitliğini kanıtlayın.

2. Eğer f ve g birer polinomsa, $f \circ g$ bu polinomların (bu sırayla) bileşkelerini simgelesin. $(f \circ g)' = f' \circ g \cdot g'$ eşitliğini kanıtlayın.

Güç Serileri. f_nX^n terimlerinin sonlu tanesini değil de sonsuz tanesini "toplarsak", elde ettiğimiz şey artık bir polinom değildir. Örneğin, sonsuza kadar uzayan

$$1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + \ldots$$

ifadesi bir polinom değildir. Bu tür ifadelere ***güç serileri*** (ya da Doğuran Fonksiyonlar yazısında olduğu gibi bazen ***doğuran fonksiyonlar*** da) denir. Güç serileri de polinomlar gibi

$$1, X, X^2, X^3, \ldots$$

terimlerinin sayılarla çarpılıp toplanmasıyla elde edilir, ancak bu kez toplamın illa sonlu olması gerekmez. Daha dışavurumcu bir ifadeyle, bir ***güç serisi***, $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ sayıları için,

$$f_0 + f_1X + f_2X^2 + \ldots + f_nX^n + \ldots$$

biçiminde yazılan bir ifadedir. (Bkz. MD-2004-II, sayfa 32-42.)

Güç serileri de aynen polinomlar gibi toplanıp çarpılırlar. Örneğin,

$$(1 + X + X^2 + X^3 + \ldots)(1 - X + X^2 - X^3 + \ldots) = 1 + X^2 + X^4 + X^6 + \ldots$$

$$(1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + \ldots)(1 - X - X^2 - X^3 - \ldots) = 1 + X - 2X^3 - 5X^4 + \ldots$$

Her polinom bir güç serisidir ama her güç serisi bir polinom değildir. Bir güç serisinin polinom olabilmesi için X^n'lerin katsayılarının bir zaman sonra hep 0 olması gerekmekir.

Güç serilerinin türevini aynen polinomlardaki gibi tanımlayabiliriz. Bir önceki sayfada kanıtladığımız üç önsav güç serileri ve türevleri için de geçerlidir, kanıtları da aynıdır.

Alıştırmalar.

1. Polinomlarda $f' = f$ "diferansiyel denklemi"ni çözemeyiz, çünkü bir polinomun türevinin derecesi polinomun derecesinden daha küçüktür. Ama güç serilerinde çözebiliriz[3]. $f' = f$ denkleminin güç serilerinde tüm çözümlerini bulun.

2. Türevin de türevi alınabilir. $f'' = f$ diferansiyel denkleminin tüm çözümlerini bulun.

3. $\partial : \mathsf{R}[X] \to \mathsf{R}[X]$ fonksiyonu, her $f, g \in \mathsf{R}[X]$ için,

$$\partial(f + g) = \partial f + \partial g$$
$$\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g + f \cdot \partial(g)$$

eşitliklerini sağlıyorsa ∂ fonksiyonuna ***türev*** denir.

3a. Her $f \in \mathsf{R}[X]$ için, $\partial(f^n) = nf^{n-1}\partial(f)$ eşitliğinin sağlandığını kanıtlayın.

3b. Her $q \in \mathsf{Q}$ için, $\partial(q) = 0$ eşitliğini kanıtlayın. (İpucu: Önce $q \in \mathsf{N}$, sonra $q \in \mathsf{Z}$ için kanıtlayın.

3c. Her $r \in \mathsf{R}$ için, $\partial(r) = 0$ eşitliğini varsayarak, bir ∂ türevinin $\partial(X)$ tarafından belirlendiğini ve $\partial(X)$'in herhangi bir polinom olarak alınabileceğini kanıtlayın.

4. R herhangi bir halka olsun. $\partial : R \to R$ fonksiyonu, her $f, g \in R$ için,

$$\partial(f + g) = \partial f + \partial g$$
$$\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g + f \cdot \partial(g)$$

eşitliklerini sağlıyorsa ∂ fonksiyonuna ***türev*** denir.

4a. ∂_1 ve ∂_2 birer türevse ve $a_1, a_2 \in R$ ise $a_1\partial_1 + a_2\partial_2$'nin de bir türev olduğunu kanıtlayın.

4b. ∂_1 ve ∂_2 birer türevse, $[\partial_1, \partial_2]$ olarak yazılan $\partial_1 \circ \partial_2 - \partial_2 \circ \partial_1$ fonksiyonunun da bir türev olduğunu kanıtlayın.

4c (Jacobi Eşitliği). ∂_1, ∂_2 ve ∂_3 birer türevse,

$$[[\partial_1, \partial_2], \partial_3] + [[\partial_2, \partial_3], \partial_1] + [[\partial_3, \partial_1], \partial_2] = 0$$

eşitliğini kanıtlayın. ♠

3 Biraz analiz görmüş okurların bildiği gibi $f(x) = e^x$ fonksiyonu bu denklemin bir çözümüdür. Ama biz bir fonksiyon değil bir güç serisi arıyoruz. $f(x) = e^x$ örneğinden yola çıkarak, okur,

$$1 + X/1! + X^2/2! + X^3/3! + \ldots + X^n/n! + \ldots$$

güç serisinin bu denklemin bir çözümü olduğunu tahmin edebilir.