Kapak Konusu: Sayma

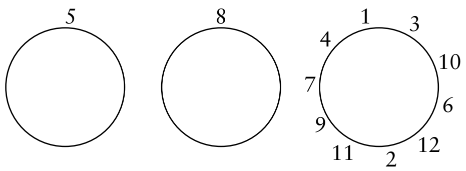
Stirling Sayıları

Şermin Çam* / *sermincam5@yahoo.com*

Birinci Stirling Sayıları. 12 kişiyi 3 yuvarlak masaya, her masada en az bir kişi olması koşuluyla kaç değişik biçimde yerleştirebiliriz?

Sokaktaki matematikçi artık öğrencilik yıllarının sona erdiğini, oysa bu tür soruların öğrencilerin hayatını zehir etmek için icat edildiğini söyleyip soruyu sorana başka-işim-gücüm-mü-yok muamelesi çeker.

Örneğin iki masaya birer kişi koyup, geri kalan on kişiyi üçüncü masaya yerleştirebiliriz. Tabii tek başına oturacak o iki kişiyi değişik biçimlerde

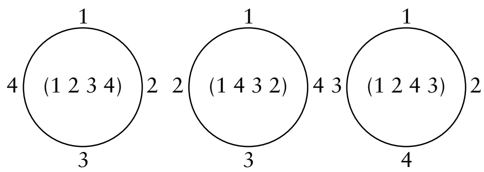


(5)(8)(1 3 10 6 12 2 11 9 7 4) yerleşimi

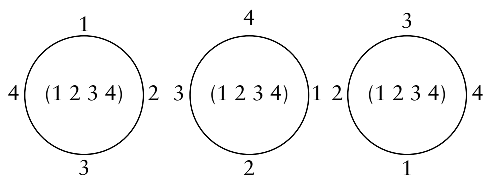
(tam 66 değişik biçimde; neden?) seçebiliriz. Geri kalan on kişiyi de üçüncü masaya değişik biçimlerde oturtabiliriz.

Ya da her masaya, pişpirik oynayacaklarmış gibi dörder kişi yerleştirebiliriz; pişpirik oynayacak dörtlü grupları değişik biçimlerde seçebiliriz elbet; ayrıca herhangi dört kişilik bir grubu masanın etrafına değişik biçimlerde oturtabiliriz.

Aşağıdaki yerleşimler değişik yerleşimler olarak algılanacak (kişilerin sağı solu önemli olacak yani.)



Ama aşağıdaki şekildeki yerleşimler değişik algılanmayacak.

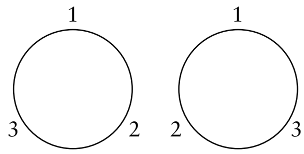


* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü ikinci sınıf öğrencisi.

Sözün kısası masaların yuvarlak oluşu sonuçsuz değil, masaların başı sonu yok. Ancak masanın sağı solu var. Öte yandan iki değişik masa arasında ayrım gözetmiyoruz.

Dikkat ettiyseniz masalar arasında ayrım gözetmiyoruz, ama kişiler arasında ayrım gözetiyoruz. Eğer kişiler arasında da ayrım gözetmeseydik, sorumuzu 12 patatesi 3 çuvala kaç değişik biçimde koyabiliriz şeklinde sorardık; ne de olsa patateslerin ve çuvalların kişilikleri yoktur. Yani kişilerin numarası var ama masaların numarası yok.

Genel soru şu: n kişi k tane yuvarlak masaya, her masada en az bir kişi olması koşuluyla kaç değişik biçimde yerleştirilir? $s(n, k)$ ile gösterilen bu sayılara ***Birinci Stirling Sayıları*** adı verilir. Amacımız $s(n, k)$ sayılarını kolayca hesaplayabilmek.



Üç kişi iki değişik biçimde yuvarlak bir masaya yerleşebilir. Demek ki $s(3, 1) = 2$.

Her masada en az bir kişi olması gerektiğinden, kişi sayısı masa sayısından az olursa böyle bir yerleştirme yapılamayacağından $s(n, k) = 0$'dır. Dolayısıyla $0 \le k \le n$ koşullarının sağlandığını varsayabiliriz.

Sym(n) ile İlişki

Her yerleşim (1 2)(3 4 5)(6 7)(8) gibi bir yazılımla gösterilebilir. Örneğin, $s(4, 2)$'yi hesaplamak için şu listeyi saymak gerekir:

(1)(2 3 4), (1)(2 4 3), (2)(1 3 4), (2)(1 4 3),
(3)(1 2 4), (3)(1 4 2), (4)(1 2 3), (4)(1 3 2),
(1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3).

Dolayısıyla $s(4, 2) = 11$. Görüldüğü gibi $s(n, k)$, Sym(n) grubunda k ayrık döngünün çarpımı olarak yazılan elemanların sayısıdır. Dolayısıyla, bir sonraki sayfada bir kez daha kanıtlayacağımız

$$\sum_{k=1}^{n} s(n,k) = n!$$

formülü geçerlidir.

Birkaç Özel Durum. Birkaç kolay durumda $s(n, k)$ sayılarını bulalım.

Önce hiç masa olmadığı, yani $k = 0$ durumunu ele alalım.

Eğer 0 kişi varsa, bu 0 kişinin hepsini birden 0 tane masaya tek bir biçimde oturtabiliriz: Kimseyi hiçbir masaya yerleştirmeyiz olur biter! Başka da çözüm yoktur. Demek ki $s(0, 0) = 1$. (Bu akıl yürütmede matematikten ziyade temel mantık var, anlamayan bu şıkkı geçebilir, o kadar önemli değil.)

Öte yandan eğer en az bir kişi varsa, bu kadar çok kişiyi 0 masaya yerleştiremeyiz. Demek ki $n > 0$ ise, $s(n, 0) = 0$.

Eğer sadece bir tek masa varsa, yani $k = 1$ ise yanıt ne olacak? Herkesi bu tek masaya yerleştireceğiz. Bir numaralı kişiyi masanın herhangi bir yerine yerleştirebiliriz (boş yerler arasında bir ayrım yok.) Geri kalan $n - 1$ yere geri kalan $n - 1$ kişiyi yerleştireceğiz. Elbette $(n - 1)!$ değişik biçimde yapabiliriz böyle bir yerleşimi. Demek ki $s(n, 1) = (n - 1)!$ dir.

Eğer $k = n$ ise, yani masa sayısı kişi sayısına eşitse, o zaman her masaya bir kişi yerleştirmek zorunda kalırız, yani bir tek çözüm vardır. (Masalar arasında ayrım gözetmediğimizden tek bir yerleşim vardır, yoksa yerleşim sayısı $n!$ olurdu.) Demek ki $s(n, n) = 1$.

Şimdi de masa sayısının kişi sayısından bir eksik olduğu duruma bakalım: n kişi ve $n - 1$ masa olsun. n de 1'den büyük olsun, çünkü $n = 1$ şıkkında $k = n - 1 = 0$ ve bu durumu yukarda halletmiştik. Ne boş bir masa ne de ayakta kalan birini görmek istiyoruz. Demek ki masalardan birine (hangisi olduğu önemli değil) iki kişi oturacak, diğer masalara da birer kişi yerleştireceğiz. Önemli olan aynı masaya oturacak o iki kişiyi seçmek; o iki kişi seçildiğinde yerleşim planı kendiliğinden ortaya çıkar. n kişi arasından 2 kişi seçeceğiz.. Bunu

$$s(n,2) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

değişik biçimde yapabiliriz.

Genel Durum. Genel durumu irdelemek için, *n kişi, birbirinden farksız n masaya kaç değişik şekilde oturabilir?* sorusuna iki ayrı yanıt bulup yanıtları eşleyeceğiz. (Bu kez, ilk sorumuzun aksine bazı masalar boş kalabilir.)

Birinci Yanıt: n kişi 1 masaya $s(n, 1)$, 2 masaya $s(n, 2)$ ve genel olarak $1 \le k \le n$ için k masaya $s(n, k)$ farklı şekilde oturabilir. Öyleyse, doldurdukları masa sayısını göz önünde tutarak, n kişinin n masaya $\sum_{k=1}^{n} s(n, k)$ değişik biçimde yerleşeceklerini buluruz. Birinci yanıtı bulduk. Şimdi aynı soruya ikinci bir yanıt bulalım.

İkinci Yanıt: Masalar birbirinden ayırt edilemediklerinden, birinci kişinin tek bir hamlesi var: Herhangi bir masaya oturmak. İkinci kişi ya boş masalardan birine yerleşecek (hangi boş masaya yerleştiği önemli değil çünkü masalar arasında ayrım gözetmiyoruz) ya da birincinin oturduğu masaya (diyelim soluna, şimdilik sağ-sol önemli değil ama yakında önemli olacak) yerleşecek. Demek ki ikinci kişinin iki değişik hamlesi var. Üçüncü kişinin yapabileceği hamleleri sayalım: ya boş bir masaya geçecek ya birincinin hemen soluna oturacak ya da ikincinin hemen soluna oturacak. Demek ki üçüncünün toplam 3 hamlesi var. Dördüncü kişi boş bir masaya geçebilir ya da birincinin hemen soluna geçebilir ya da ikincinin hemen soluna geçebilir ya da üçüncünün hemen soluna geçebilir. Dördüncü kişinin toplam 4 hamlesi var. Genel olarak k-inci kişinin k hamlesi var.

Demek ki n kişi n masaya $n!$ biçimde oturabilir. İkinci yanıtı da bulduk.

Yukarda bulduğumuz iki yanıtı eşleyelim:

$$\sum_{k=1}^{n} s(n, k) = n!$$

buluruz. Binom katsayıları arasında da benzer bir ilişki vardır (bkz. sayfa 25):

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

Binom katsayılarıyla ilgili

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n-1}{i-1}$$

eşitliğini sayfa 25'te kanıtlamıştık. Birinci Stirling Sayıları için de benzer bir eşitlik vardır ve bu eşitlik sayesinde değerini bildiğimiz Birinci Stirling Sayılarını kullanarak yenilerini hesaplayabiliriz.

Teorem 1. *$n \ge k \ge 1$ ise,*

$$s(n, k) = s(n - 1, k - 1) + (n - 1)s(n - 1, k).$$

Kanıt: n kişiyi k masaya, hiçbir masa boş kalmayacak şekilde yerleştireceğiz. En son kişi olan n'yi ele alalım. İki şık var: Ya n tek başına bir masada kalacak ya da başkalarıyla birlikte olacak.

Eğer n numaralı kişi bir masada tek başınaysa, geri kalan $k - 1$ masaya $n - 1$ kişi hiçbir masa boş kalmayacak şekilde yerleştirilmiş demektir. Demek ki bu şıkta $s(n - 1, k - 1)$ seçenek var.

n'nin yalnız kalmaması için $n-1$ kişiyi $s(n-1, k)$ değişik biçimde k masaya yerleştirmeli ve n'yi kalan $n-1$ kişiden herhangi birinin hemen soluna oturtmalıyız, bunu yapmanın da elbette $n-1$ yolu vardır. Demek ki n numaralı kişinin yalnız kalmayacağı $(n-1)s(n-1, k)$ kadar yerleşim biçimi vardır.

Böylelikle toplamda

$$s(n-1, k-1) + (n-1)s(n-1, k)$$

tane yerleşim belirleyebiliriz. □

Teorem 1'i kullanarak Birinci Stirling Sayıları için de binom açılımlarındaki katsayıları gösteren Pascal üçgeni gibi bir üçgen (Birinci Stirling Üçgenini) oluşturabiliriz ve Birinci Stirling Sayılarını teker teker bulabiliriz.

Birinci Stirling Sayıları

$s(0, k)$: 1									
$s(1, k)$: 0	1								
$s(2, k)$: 0	1	1							
$s(3, k)$: 0	2	3	1						
$s(4, k)$: 0	6	11	6	1					
$s(5, k)$: 0	24	50	35	10	1				
$s(6, k)$: 0	120	274	225	85	15	1			
$s(7, k)$: 0	720	1764	1624	735	175	21	1		
$s(8, k)$: 0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
$s(9, k)$: 0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

Birinci Stirling Sayılarının Cebirsel Tanımı. Nasıl binom katsayıları $(x + y)^n$ polinomunun katsayılarıysa, Birinci Stirling Sayıları da bir polinomun katsayılarıdır:

Teorem 2. *Birinci Stirling Sayısı $s(n, k)$, $n > 0$ için,*

$$p_n(x) = x(x+1) \dots (x+n-1)$$

polinomunda x^k'nin katsayısıdır, yani,

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k.$$

Kanıt: $p_n(x)$ polinomunda x^k teriminin katsayısı $a_{n,k}$ olsun, yani

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k$$

olsun. $p_n(x) = (x + n - 1)p_{n-1}(x)$ olduğundan, bu polinomlar tümevarımla kanıta elverişlidirler. Bundan yararlanıp hesaplayalım:

$$p_n(x) = (x+n-1)p_{n-1}(x) = (x+n-1)\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}x^k$$
$$= x\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}x^k + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}x^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}x^{k+1} + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}x^k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{n-1,k-1}x^k + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}x^k$$
$$= a_{n-1,0} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-1,k-1} + (n-1)a_{n-1,k})x^k + a_{n-1,n-1}x^n.$$

Herhangi iki polinomun eşitliği, her $k \in \mathbb{Z}$ için bu polinomların x^k terimlerinin katsayılarının eşit olması anlamına geldiğine göre, $n > 1$ için,

$$a_{n,0} = a_{n-1,0}$$
$$a_{n,n} = a_{n-1,n-1}$$

ve $0 < k < n$ iken,

$$a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + (n-1)a_{n-1,k}$$

dır.

Bulduğumuz bu son ilişki sayesinde $a_{1,0}$ ve $a_{1,1}$ katsayılarından hareketle tüm $a_{n,k}$ katsayılarını bulabiliriz. $a_{1,0} = 0$ ve $a_{1,1} = 1$ eşitlikleri de kolaylıkla bulunabilir.

Görüldüğü üzere, $a_{n,k}$ ve $s(n, k)$ sayıları birbirleriyle aynı tümevarımsal bağlantıyı sağlıyorlar. Dolayısıyla başlangıç koşulları aynıysa $a_{n,k}$ ve $s(n, k)$ eşit olurlar. Nitekim öyle de: $s(1, 0) = 0 = a_{1,0}$ ve $s(1, 1) = 1 = a_{1,1}$. Demek ki $s(n, k) = a_{n,k}$ olmalı. □

Yukardaki polinomu kullanarak, binom katsayıları için bulduğumuz eşitliklerin benzerlerini Birinci Stirling Sayıları için de kanıtlayabiliriz:

Eğer yukardaki polinomda $x = 1$ alırsak, ilk sayfada da (gri karede) kanıtladığımız

$$\sum_{k=1}^{n} s(n,k) = n!$$

eşitliğini bir kez daha buluruz. Eğer $x = -1$ alırsak $n \geq 2$ için

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k s(n,k) = 0$$

buluruz. $x = 2$ aldığımızda bulunacak eşitliği okura bırakıyoruz.

İkinci Stirling Sayıları. Birinci Stirling Sayılarından sonra ***İkinci Stirling Sayıları*** gelir. Bu sefer n kişiyi her grupta en az bir kişi olacak şekilde k gruba ayıracağız. Böyle kaç gruplaşma vardır? Her grup bir altküme olduğundan, bunu n elemanlı bir kümenin k tane ayrık ve boş olmayan altkümeye parçalanış sayısı olarak görebiliriz. Bu dağıtımların sayısına ***İkinci Stirling Sayıları*** denir ve bu sayılar $S(n, k)$ olarak simgelenir.

Örnek olarak $S(4, 2)$'yi bulalım. Dört elemanlı {1, 2, 3, 4} kümesini iki ayrık ve boş olmayan altkümeye parçalayacağız. İşte bu parçalanışlar:

{1}, {2, 3, 4}
{1, 2}, {3, 4}
{1, 3}, {2, 4}
{1,4}, {2, 3}
{1, 2, 3}, {4}
{1, 2, 4}, {3}
{1, 3, 4}, {2}.

Toplam 7 tane bulduğumuzdan, $S(4, 2) = 7$'dir.

Amacımız $S(n, k)$ sayılarını kolay bir biçimde hesaplayabilmek. İşe gene kolay birkaç sonuç bulmakla başlayalım.

$S(0, 0) = 1$'dir: Eğer kimse yoksa, bu kişileri (!) tek bir biçimde 0 gruba ayırabiliriz, kimseyi hiçbir gruba sokmayız olur biter! (Gene mantık yaptık!) Ama eğer $n > 0$ ise, $S(n, 0) = 0$'dır elbette.

Eğer $k = 1$ ise tek bir parçalanış vardır, herkesi tek grupta toplayalım. Dolayısıyla $S(n, 1) = 1$'dir.

Eğer $k = n$ ise gene tek bir parçalanış vardır, her grup bir kişiden teşekkül eder: $S(n, n) = 1$.

Eğer $k > n$ ise parçalayan kümelerden en az biri boşküme olmak zorunda olur; demek ki bu durumda $S(n, k) = 0$. Bundan böyle $k \le n$ eşitsizliğini varsayabiliriz.

Biraz daha ciddi sonuçlara doğru yelken açmanın zamanı geldi. $S(n, n-1)$'i hesaplayalım. $n - 1$ kümeden birinde iki eleman, diğerlerinde birer eleman olmalı. n eleman arasından aynı gruba düşecek o iki elemanı seçeceğiz; bunu kaç değişik biçimde yapacağımızı biliyoruz:

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$S(n, 2)$'yi de bulmak o kadar zor değil. Parçalayan kümelerden birini seçtik mi diğeri belirlenir, nitekim eğer parçalayan kümelerden biri A ise diğeri A'nın tümleyeni olan A^c kümesi olmak zorundadır. Ama burada A boşküme ya da tüm küme olamaz (yoksa tümleyeni boş olur.) n elemanlı bir kümenin 2^n tane altkümesi olduğundan, A için $2^n - 2$ seçeneğimiz var. Yalnız bir şeye daha dikkat etmek gerekiyor: (A, A^c) parçalanışıyla (A^c, A) parçalanışı aynı parçalanışlar. Demek ki $2^n - 2$ sayısını ikiye bölmemiz gerekiyor. Sonuç: $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.

Birinci Stirling Sayıları ve binom katsayıları için yaptığımız gibi İkinci Stirling Sayıları için de tümevarımsal bir ilişki bulalım, böylece bu sayıları da küçüklerden başlayarak teker teker hesaplayabileceğiz.

Teorem 3. $n \ge k \ge 1$ *için*

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: $\{1, 2, ..., n\}$ kümesi k altkümeye tanım gereği $S(n, k)$ farklı yolla parçalanabilir. Bu parçalanışlardan, altkümelerden birinin $\{n\}$ olduğu tam $S(n-1, k-1)$ tane parçalanış vardır, çünkü bu durumda $\{1, 2, ..., n-1\}$ kümesini $k - 1$ kümeye parçalamak zorundayız. n elemanının altkümelerden birinde tek eleman olmadığı parçalanışlar ise $\{1, 2, ..., n-1\}$ kümesini k altkümeye parçalayıp n'yi bu altkümelerden herhangi birine eklemek yoluyla elde edilebilir. Bunu yapmanın da $kS(n-1, k)$ yolu var. Yani $\{1, 2, ..., n\}$ kümesi k altkümeye aynı zamanda $S(n-1, k-1) + k\,S(n-1, k)$ değişik biçimde parçalanabilir. □

İkinci Stirling Sayıları

$S(0, k)$:	1									
$S(1, k)$:	0	1								
$S(2, k)$:	0	1	1							
$S(3, k)$:	0	1	3	1						
$S(4, k)$:	0	1	7	6	1					
$S(5, k)$:	0	1	15	25	10	1				
$S(6, k)$:	0	1	31	90	65	15	1			
$S(7, k)$:	0	1	63	301	350	140	21	1		
$S(8, k)$:	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
$S(9, k)$:	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Şimdi, İkinci Stirling Sayıları için cebirsel bir tanım bulalım. $x, n \ge 0$ için

$$q_n(x) = x(x-1) \dots (x-n+1)$$

polinomunu tanımlayalım.

Teorem 4. $n \ge 0$ *için,*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) q_k(x).$$

Kanıt: Birinci Stirling Sayıları için verdiğimiz benzer teoremdeki gibi düşüneceğiz. Şu soruyu iki değişik şekilde yanıtlayalım: *n kişi kaç değişik biçimde numaralandırılmış x balona dağıtılabilir*? Bu sefer orijinal sorumuzun tersine bazı balonlarda 0 kişi olabilir. Ayrıca balonları numaralandırarak her balona bir kişilik veriyoruz. Bu soruyu iki değişik biçimde yanıtlayacağız.

Birinci yanıt: Herkesin x seçeneği olduğuna göre, n kişi x^n değişik biçimde x balona dağıtılabilir.

İkinci yanıt: n kişinin x balondan k tanesine bineceklerini, diğer balonların boş kalacağını düşünelim. Balonlara daha sonra bindirmek üzere n kişiyi k gruba ayıralım. Bu gruplaşmayı $S(n, k)$ değişik biçimde yapabiliriz. Şimdi bu $S(n, k)$ gruplaşmadan herhangi birini alalım. Birinci grup x balondan birini seçecek. İkinci grup geri kalan $x - 1$ balondan birini seçecek, genel olarak k'inci grup geri kalan $x - k + 1$ balondan birini seçecek. Demek ki her gruplaşmanın

$$x(x-1) \dots (x-k+1) = q_k(x)$$

tane değişik biniş şekli vardır. Bundan da k balonun $S(n, k)q_k(x)$ değişik biçimde doldurulabileceği çıkar. Dolayısıyla yanıt

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)q_k(x)$$

dır ve böylece teorem kanıtlanmıştır. □

Stirling Sayıları Arasındaki İlişki. Birinci ve İkinci Stirling Sayıları arasında beklenmedik bir ilişki vardır:

Teorem 5. *$m, n \in \mathbb{Z}$ için,*

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } n = m \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } n \neq m \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. O zaman

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)S(k,m)(-1)^k = (-1)^n \delta_{m,n}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: $m \neq n$ için $\delta_{m,n} = 0$ olduğundan, bu durumda,

$$\sum_{k \text{ çift}} s(n,k)S(k,m) = \sum_{k \text{ tek}} s(n,k)S(k,m)$$

eşitliğini göstermeliyiz.

Bir okulda n öğrenci, m sınıf ve k tane daire biçiminde masa olsun. Sınıflar ve masalar arasında bir fark olmasın, her sınıf her sınıfa ve her masa her masaya benzesin. Her sınıfta en az bir masa olacak ve her masada en az bir öğrenci olacak biçimde kaç değişik masa dağıtımı ve öğrenci yerleşimi yapılabilir?

Öğrencileri masalara $s(n, k)$ biçimde yerleştirebiliriz. Bu yerleştirmelerden birini yaptığımızda daha önce aralarında fark olmayan masalar birdenbire öğrenciler sayesinde kişilik kazanırlar. Bu kişilik kazanmış k masayı m sınıfa hiçbir sınıf boş kalmayacak şekilde $S(k, m)$ biçiminde yerleştirebiliriz. Demek ki böyle bir masa dağıtımı ve öğrenci yerleşimi $s(n, k)S(k, m)$ değişik biçimde yapılabilir. Bu sayıları k tekken ve çiftken ayrı ayrı toplarsak, eşit olduklarını göstermek istediğimiz toplamları buluruz.

Eğer $n \geq k \geq m$ eşitlikleri sağlanmazsa ya bazı sınıflar masasız ya da bazı masalar öğrencisiz kalacağından bu durumda $s(n, k)S(k, m) = 0$'dır. Dolayısıyla $m > n$ ise istediğimiz eşitliği elde ederiz.

Şimdi $n > m$ eşitsizliğini varsayalım. Öğrencileri 1'den n'ye kadar numaralandıralım. O zaman en az bir sınıfta birden fazla öğrenci olacaktır. Bir sınıfta tek başına bulunmayan en küçük numaralı öğrenci a olsun. a'yla aynı sınıfta bulunan bir sonraki numaralı öğrenci b olsun. Demek ki a ile b aynı sınıftalar, a'dan küçük numaralı öğrenciler tek başlarınalar ve a'nın sınıfında numarası a'yla b arasında olan başka bir öğrenci yok. İki şık var: a ile b ya aynı masada ya da ayrı masalarda oturuyorlardır. Eğer a'yla b ayrı masalarda oturuyorlarsa, b'nin masasını, b'nin sağındaki kişi a'nın hemen sağına gelecek şekilde ve oturuş sırasını bozmadan olduğu gibi a'nın masasına aktaralım. Eskiden b'nin oturduğu ve şimdi boş kalan masayı da atalım. Böylece masa sayısı bir azalır. Eğer a'yla b aynı masalarda oturuyorlarsa, b de dahil olmak üzere, b'nin solunda ve a'nın sağında kalan öğrencileri bu sırayla yeni bir masaya aktaralım. Böylece masa sayısı bir artar. Bu iki işlemin birbirinin tersi olduğuna dikkatinizi çekerim. Yani birinin değiştirdiğini diğeri geri değiştirir. Masa sayısı 1 arttığından ya da 1 azaldığından, k tekse çift olur, çiftse tek olur. Bu da yukardaki eşitliğin doğru olduğu anlamına gelir.

Şimdi de $m = n$ olsun. O zaman $s(n, k)S(k, n)$ sayılarından sadece $s(n, n)S(n, n)$ sayısı 0 değildir: $s(n, n)S(n, n) = 1$. Bu durumda eşitlik çok bariz. □

Alıştırmalar

1. Her $n, k \geq 0$ tamsayıları için, $s(n, k) \geq S(n, k)$ eşitsizliğini kanıtlayın. Eşitlik hangi durumda geçerlidir?

2. Aşağıdaki formülleri kanıtlayın. (Graham, Knuth ve Patashnik, **Concrete Mathematics**.)

$$S(n+1,m+1) = \sum_k \binom{n}{k} S(k,m)$$

$$s(n+1,m+1) = \sum_k \binom{k}{m} s(n,k)$$

$$S(n,m) = \sum_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} S(k+1,m+1)$$

$$s(n,m) = \sum_k (-1)^{m-k} \binom{k}{m} s(n+1,k+1)$$

$$m!\,S(n,m) = \sum_k (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^n$$

$$S(n+1,m+1) = \sum_{k=0}^{n} S(k,m)(m+1)^{n-k}$$

$$s(n+1,m+1) = n! \sum_{k=0}^{n} s(k,m)/k!$$

$$S(m+n+1,m) = \sum_{k=0}^{m} kS(n+k,k)$$

$$s(m+n+1,m) = \sum_{k=0}^{m} (n+k)s(n+k,k)$$

$$\binom{n}{m} = \sum_k (-1)^{m-k} S(n+1,k+1)s(k,m)$$

$$S(n,n-m) = \sum_k \binom{m-n}{m+k}\binom{m+n}{n+k} s(m+k,k)$$

$$s(n,n-m) = \sum_k \binom{m-n}{m+k}\binom{m+n}{n+k} S(m+k,k)$$

♠