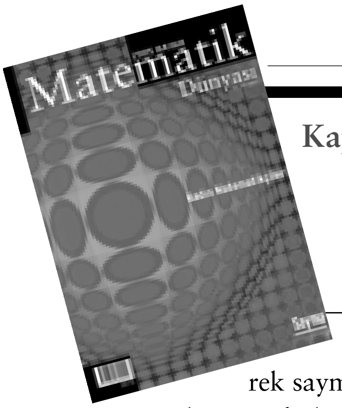


Kapak Konusu: Sayma

Pokerin Matematiği

Ali Nesin* / *anesin@bilgi.edu.tr*

Bu yazıda pokeri bahane ederek saymanın temellerini ele alacağız.

Poker, en fazla dört oyuncuyla ve yediliden asa 32 iskambil kâğıdıyla oynanır. (Amerika'da 52 kâğıtla oynanır poker ama biz bu yazıda 32 kâğıtla oynanan "Türk pokeri"nden sözedeceğiz.)

Hemen belirtelim, bu yazının içeriğini anlamak için poker bilmeye gerek yoktur ama bir deste iskambil kâğıdını ele almış olmak gerekir.

Pokerde, oyunun başında her oyuncuya önce 32'lik desteden beşer kâğıt dağıtılır, sonra her oyuncu elindeki beş kâğıttan istediği kadarını değiştirebilir (isterse hiç değiştirmez.) Bu değiştirmeden sonra "en iyi" eli olan kazanır. Elbet burda "en iyi el"in tanımlanması, anlam kazandırılması gerekir. Örneğin, beş kâğıdın beşinin de aynı renkten (örneğin hepsi maça, ♠) olduğu bir el çok iyi sayılır. Bu el, iki papaz, iki as ve bir onlu gibi iki çiftten oluşan ellerden daha "iyi" bir eldir. Bunun nedeni bellidir: beş kâğıdın aynı renkten olma olasılığı ele iki çift gelme olasılığından daha düşüktür.

Aynı renkten ellere ***renk*** adı verilir. Bu yazıdaki amaçlarımızdan biri de pokerde dağıtılan ilk beş kâğıdın renk olma olasılığını hesaplamak.

Önce biraz matematik yapalım.

Faktoriyel. İlk n sayının toplamı için bir formül vardır:

$$1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2.$$

Bunu MD-2001-I, sayfa 68'te kanıtlamıştık, kanıtı da oldukça basittir. Ya ilk n sayının çarpımı nedir? $1 \times 2 \times \ldots \times n$ sayısı nasıl hesaplanır?

Soru tuhaf, çünkü yanıtı "ilk n sayının çarpımı ilk n sayının çarpımıdır" da olabilir! Ama bizim amacımız, aynen toplama için yaptığımız gibi, kapalı, yani "..." (üç nokta) kullanmadan bir formül bulmak.

İlk n sayının çarpımı için yukardaki gibi cebirsel bir kapalı formül yoktur! Ama matematikte ilk n sayının çarpımına çok gereksinilir. Dolayısıyla böyle kapalı bir formülün olmaması rahatsız edici. Madem öyle biz de ilk n sayının çarpımını simgeleyen bir simge icat edelim. Bundan böyle ilk n sayının çarpımını $n!$ olarak yazalım.

Tanım. *Eğer n bir doğal sayıysa, $n!$ ilk n sayının çarpımını simgeler, yani,*

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n - 1) \times n$$

dir.

Örneğin, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$'dir. $0! = 1$ olarak tanımlanır. İlk bakışta pek doğal gelmeyen bu tanımın nedenini yazının ortalarında bulabilirsiniz.

$n!$ sayısı "*n* ***faktoriyel***" olarak okunur.

Daha matematiksel olarak $n!$ tümevarımla şöyle tanımlanır:

$$0! = 1$$
$$(n + 1)! = (n + 1) \times n!$$

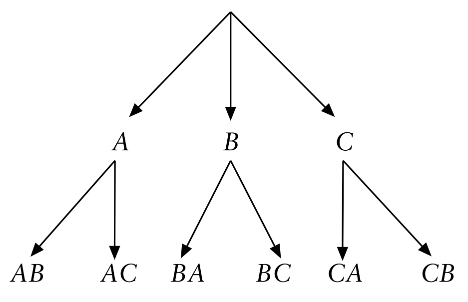
Dikkat! $n!$ okunurken n'nin haykırılarak söylenmesi gerekmez.

Harflerden Sözcük Üretmek. Elimizde A, B ve C harfleri var ve bu harflerden ikisini kullanarak (Türkçede ya da başka bir dilde anlamı olması gerekmez) iki harfli sözcük üretmek istiyoruz. Kaç sözcük üretebiliriz?

Bu soruyu yanıtlamak için sözcükleri – abece sırasına göre – sıralayalım.

$$AB, AC, BC, BA, CA, CB.$$

Demek 6 sözcük üretebilirmişiz. Bu sözcüklerin oluşumunu aşağıdaki şekildeki gibi de gösterebiliriz. Önce ilk harfleri koyuyoruz: Sırasıyla A, B ve



---

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi. Bu yazı, yazarın **Matematik ve Oyun** adlı kitabındaki bir yazısından uyarlanmıştır.

C. Sonra ikinci harfleri: Eğer ilk harfimiz A ise, ikinci harf için iki seçeneğimiz var: B ve C. Dolayısıyla A budağına B ve C dallarını ekliyoruz. Her üç dal için bunu yaptığımızdan, bu 3 harfle toplam $3 \times 2 = 6$ tane iki değişik harfli sözcük yazabileceğimizi görürüz.

Şimdi bu soruyu genelleştirelim.

Birinci Soru. *Elimizde n değişik harf var: A_1, A_2, ..., A_n harfleri. Bu n harften, r değişik harfli sözcükler üretmek istiyoruz (her harfi en çok bir kez kullanabiliriz.) Kaç sözcük üretebiliriz?*

Bu soruya yanıt verebilmek için yukardaki gibi ters dönmüş bir ağaç yapalım. Ağacın ilk budağından aşağıya doğru n dal çıkar:

$$A_1, A_2, ..., A_n$$

dalları. Bunlar sözcüklerin ilk harfleri. Bu dalların uçlarına $n - 1$ dal eklenir (ikinci harfler.) Örneğin A_1 dalına

$$A_2, ..., A_n$$

dalları eklenir. Bu yeni dallar,

$$A_1A_2, ..., A_1A_n$$

sözcüklerini oluştururlar. A_2 dalınaysa,

$$A_1, A_3, ..., A_n$$

dalları eklenir ve,

$$A_2A_1, A_2A_3, ..., A_2A_n$$

sözcüklerini oluştururlar. Böylece $n \times (n - 1)$ dal elde etmiş oluruz. Demek ki iki harfli sözcük sayısı $n \times (n - 1)$ imiş. Ağacı sürdürelim. Yukarda elde ettiğimiz her $n \times (n - 1)$ dala şimdi $n - 2$ dal daha ekleyebiliriz. Örneğin, A_1A_2 dalına,

$$A_3, ..., A_n$$

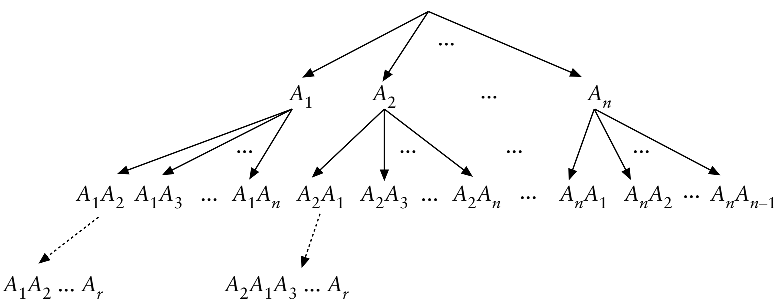
dallarını ekleyebiliriz. Bu yeni dalların herbirinin ucuna 3 harfli sözcükler yazılır. Böylece

$$n \times (n - 1) \times (n - 2)$$

tane üç harfli sözcük elde ederiz. Bu yöntemi sürdürerek, A_1, ..., A_n harflerinden

$$n \times (n - 1) \times ... \times (n - (r - 1))$$

tane r değişik harfli sözcük yazacağımızı görürüz. Bu sayı da



$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

sayısına eşittir (sadeleştirince eşitlik hemen çıkar.) İlk teoremimizi kanıtladık:

Teorem 1. *$r \leq n$ iki doğal sayıysa, A_1, ..., A_n harflerini en çok bir kez kullanarak*

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

tane r harfli sözcük yazılabilir.

Eğer yukardaki teoremde r'yi n alırsak, $n!$ buluruz: Birbirinden farklı A_1, ..., A_n harflerinin herbirini kullanarak $n!$ tane sözcük yazılır.

Alıştırmalar ve Yanıtları

1. SELİM sözcüğünün harfleriyle kaç tane üç harfli sözcük yazabiliriz? Yukardaki teoremi uygulayarak $5!/(5 - 3)! = 5!/2! = 5 \times 4 \times 3 = 60$ sözcük buluruz. Başka bir soru: SELİM sözcüğünün harfleriyle kaç tane beş harfli sözcük yazılır? Yine yukardaki teoremi uygulayalım: $5!/(5 - 5)! = 5!/0!$ ve $0! = 1$ eşitliklerini kullanarak, $5! = 120$ tane beş harfli sözcük yazabileceğimizi görürüz.

2. MELEK sözcüğünün tüm harflerini kullanarak kaç tane (beş harfli elbet) sözcük yazabiliriz? Yukardaki teoremi doğrudan uygulayamayız, çünkü iki tane E harfi var. Önce iki E'yi ayrıştıralım ve ME_1LE_2K "sözcüğünün" tüm harflerini kullanarak kaç tane beş harfli sözcük yazabileceğimizi bulalım. Bu sorunun yanıtı yukardaki gibi $5! = 120$'dir. Bu 120 sözcüğün yarısında E_1 harfi E_2 harfinden önce gelir; öbür yarısındaysa E_2 harfi E_1 harfinden önce gelir. Demek ki MELEK sözcüğünün harflerinden $120/2 = 60$ sözcük yazabiliriz.

3. Yukardaki alıştırmaya benzeyen, ama biraz daha zor olan bir alıştırma daha: KELEBEK sözcüğünün tüm harflerini kullanarak kaç sözcük yazabiliriz? Yukardaki yöntemi kullanalım ve önce $K_1E_1LE_2BE_3K_2$ sözcüğünü ele alalım. Yedi harfli bu sözcükten $7!$ sözcük üretebiliriz. Şimdi, $K_1 = K_2$ ve $E_1 = E_2 = E_3$ yapalım. Birinci eşitlik için 2'ye böleriz, ikinci eşitlik içinse $3!$'e, yani 6'ya, çünkü E_1, E_2, E_3 harfleri $3!$ değişik sırada bir sözcükte belirebilirler. Demek ki KELEBEK sözcüğünün harflerinin yerini değiştirerek $7!/(2 \times 6) = 420$ sözcük yazabiliriz.

Şimdi yeni bir soru soralım.

$A_1A_2A_3$	$A_1A_2A_4$	$A_1A_2A_5$	$A_1A_3A_4$	$A_1A_3A_5$	$A_1A_4A_5$	$A_2A_3A_4$	$A_2A_3A_5$	$A_2A_4A_5$	$A_2A_4A_5$
$A_1A_3A_2$	$A_1A_4A_2$	$A_1A_5A_2$	$A_1A_4A_3$	$A_1A_5A_3$	$A_1A_5A_4$	$A_2A_4A_3$	$A_2A_5A_3$	$A_2A_5A_4$	$A_3A_5A_4$
$A_2A_1A_3$	$A_2A_1A_4$	$A_2A_1A_5$	$A_3A_1A_4$	$A_3A_1A_5$	$A_4A_1A_5$	$A_3A_2A_4$	$A_3A_2A_5$	$A_4A_2A_5$	$A_4A_3A_5$
$A_2A_3A_1$	$A_2A_4A_1$	$A_2A_5A_1$	$A_3A_4A_1$	$A_3A_5A_1$	$A_4A_5A_1$	$A_3A_4A_2$	$A_3A_5A_2$	$A_4A_5A_2$	$A_4A_5A_3$
$A_3A_1A_2$	$A_4A_1A_2$	$A_5A_1A_2$	$A_4A_1A_3$	$A_5A_1A_3$	$A_5A_1A_4$	$A_4A_2A_3$	$A_5A_2A_3$	$A_5A_2A_4$	$A_5A_3A_4$
$A_3A_2A_1$	$A_4A_2A_1$	$A_5A_2A_1$	$A_4A_3A_1$	$A_5A_3A_1$	$A_5A_4A_1$	$A_4A_3A_2$	$A_5A_3A_2$	$A_5A_4A_2$	$A_5A_4A_3$
$\{A_1, A_2, A_3\}$	$\{A_1, A_2, A_4\}$	$\{A_1, A_2, A_5\}$	$\{A_1, A_3, A_4\}$	$\{A_1, A_3, A_5\}$	$\{A_1, A_4, A_5\}$	$\{A_2, A_3, A_4\}$	$\{A_2, A_3, A_5\}$	$\{A_2, A_4, A_5\}$	$\{A_3, A_4, A_5\}$

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 harfleriyle yazılmış üç harfli sözcükler, toplam $5!/(5-3)! = 60$ tane.
Bu sözcükleri içerdikleri harflere göre her biri $3! = 6$ sözcük içeren gruplara ayırıyoruz.
Her grup A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 harflerinin üçünden oluşmuş bir kümeye eş düşüyor.

İkinci Soru. *Elimizde n öğesi olan bir A kümesi var: $A = \{A_1, ..., A_n\}$. $r \le n$, bir doğal sayı olsun. A kümesinin kaç tane r öğeli altkümesi vardır?*

Bu sayıyı hesaplayacağız. Hesaplamak istediğimiz sayıyı

$$\binom{n}{r}$$

olarak yazalım. Bu sayıya "n'de r" ya da "n seç r" adı verilir.

Örnek: $n = 5$ ve $r = 3$ olsun. $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ kümesinin 3 öğeli bütün altkümelerini bulalım.

$\{A_1, A_2, A_3\}$
$\{A_1, A_2, A_4\}$
$\{A_1, A_2, A_5\}$
$\{A_1, A_3, A_4\}$
$\{A_1, A_3, A_5\}$
$\{A_1, A_4, A_3\}$
$\{A_2, A_3, A_4\}$
$\{A_2, A_3, A_5\}$
$\{A_2, A_4, A_5\}$
$\{A_3, A_4, A_5\}$

Toplam 10 tane 3 öğeli altküme var. Demek ki

$$\binom{5}{3} = 10$$

imiş.

Birinci soruyla arada ufak ama önemli bir ayrım var: Birinci soruda $A_1A_2A_3$ ve $A_1A_3A_2$ sözcüklerini ayrı ayrı sayıyorduk; oysa bu sorumuzda sözcüklere değil de harflerden oluşan kümelere bakıyoruz. Hem $A_1A_2A_3$, hem de $A_1A_3A_2$ sözcüklerinin harflerinden $\{A_1, A_2, A_3\}$ kümesi oluşur. Bunun gibi,

$A_1A_2A_3$
$A_1A_3A_2$
$A_2A_1A_3$
$A_2A_3A_1$
$A_3A_1A_2$
$A_3A_2A_1$

sözcüklerinin herbiri $\{A_1, A_2, A_3\}$ kümesini oluştururlar. Sayfanın üstündeki şekilde bu söylediklerimizin resmini yaptık.

İkinci soruyu yanıtlamak için bu örnekten yararlanacağız. Birinci teoreme göre, r değişik harfli sözcük sayısı $n!/(n-r)!$ dir. Bu $n!/(n-r)!$ sözcükten birçoğu aynı kümenin harflerinden oluşurlar. Kaç tanesinin aynı kümenin harflerinden oluştuğunu bulalım. Yine birinci teoreme göre r harfle yazılan $r!$ sözcük olduğuna göre, $n!/(n-r)!$ sözcükten her $r!$ tanesi aynı kümenin harflerinden oluşur. Demek ki, r öğeli altküme sayısını bulmak için $n!/(n-r)!$ sayısını $r!$ sayısına bölmeliyiz:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!/(n-r)!}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Bulduğumuz bu sonucu daha sonra sık sık kullanacağız; bir köşeye yazalım:

Teorem 2. *n öğeli bir kümenin, r öğeli altküme sayısı*

$$\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

dir.

Bu teoreme göre, 18 takımlık bir futbol liginde her takım her takımla maç yaparsa, toplam

$$\binom{18}{2} = \frac{18!}{2!(18-2)!} = \frac{18!}{2!16!} = \frac{18\times 17}{2} = 9\times 17 = 153$$

maç yapılmış olur.

İçinde 12 değişik renk bulunan bir boya kutusundan,

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12!}{5!7!} = \frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8}{5\times 4\times 3\times 2}$$
$$= 12\times 11\times 6 = 792$$

değişik biçimde beş kalem seçilebilir.

60 kişilik bir sınıftan tam,

$$\binom{60}{11}$$

tane değişik futbol takımı çıkar.

Şimdi pokere dönelim.

Toplam Poker Eli Sayısı. Şimdi toplam poker eli sayısını hesaplayabiliriz. 32 kâğıttan kaç tane 5 kâğıtlık el çıkar? Yani 32 öğelik bir kümenin kaç tane 5 öğelik altkümesi vardır? Teorem 2'ye göre,

$$\binom{32}{5} = \frac{32!}{5!(32-5)!} = \frac{32!}{5!27!} = \frac{32\times31\times30\times29\times28}{5\times4\times3\times2} = 201.376$$

tane, yani 200 binden fazla poker eli vardır. Ve bu poker ellerinden herbirinin gelme olasılığı aynıdır, yani 1/201.376'dır.

Renk Sayısı. Şimdi de kaç tane "renk" eli olduğunu hesaplayalım. Önce kaç tane maça (♠) renkli el olduğunu bulalım. 32 kâğıttan 8 tanesi maça. Bu 8 maçadan 5 tanesini seçeceğiz. Teorem 2'ye göre,

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2} = 56$$

tane salt maça olan el vardır. Toplam dört renk olduğundan (♦, ♥, ♠, ♣), bu sayıyı 4'le çarparsak, toplam renk sayısını buluruz:

$$56 \times 4 = 224.$$

Ama bu sayıdan, toplam "flush" (aynı renkten ve sürekli kâğıtlar) sayısını çıkarmalıyız (çünkü bu renkten çok daha iyi bir el.) Maçalardan oluşan flush'lar, asla (A–7–8–9–10), yediliyle, sekizliyle, dokuzluyla ya da onluyla (10–J–Q–K–A) başlayabilir. Demek maçadan 5 tane flush var ve toplam flush sayısı $5 \times 4 = 20$. Böylece, *gerçek* renk sayısının,

$$224 - 20 = 204$$

olduğunu buluruz. Olasılık olarak düşünürsek, elden renk gelme olasılığı

$$204/201.376 \approx 0{,}001013\text{'dır},$$

yani aşağı yukarı binde birdir.

Kare Sayısı. Elden kare gelme, yani beş kâğıttan dördünün aynı sayı olma olasılığını bulalım. Önce dört aslı el sayısını bulalım. Dört asın yanına gelebilecek kâğıt sayısı $32 - 4 = 28$'dir. Demek 28 tane dört aslı el var. Toplam 8 tür kâğıt olduğundan, $28 \times 8 = 224$ tane kare el vardır.

Bu sayı, renk sayısından biraz daha fazla olduğundan, renk kareyi yener diye düşünebilirsiniz. Nitekim, eğer pokerde kâğıt değiştirme olmasaydı, düşündüğünüz gibi olurdu. Ama kâğıt değiştirme olasılıkları da etkiler. Örneğin, üç ası olan, öbür iki kâğıdını değiştirerek, dört as olma olasılığını arttırır. Bunun gibi eline dört maça gelen, beşinci kâğıdını değiştirerek, renk olasılığını arttırır. Yani pokerin sonundaki olasılıklar, ilk beş kâğıdın olasılıklarından değişiktir. Pokerde rengin kareyi yenip yenmediğini bilmiyorum. Unutmuşum!

Elinde dört maçası olan, maça olmayan kâğıdını değiştirerek kaç olasılıkla rengi yakalayabilir? Hesaplayalım. 32 kâğıdın 5'i elimizde. Demek ki toplam 27 kâğıttan bir kâğıt seçilecek (öbür oyuncuların ellerini bilmiyoruz, onların elinde kâğıt yokmuş gibi hesaplayabiliriz.) Bu 27 kâğıtta 4 tane maça var (toplam maça sayısı 8, ama bu maçalardan 4'ü elimizde.) Demek ki rengi yakalama olasılığımız 4/27'dir, yani 1/7'den daha fazla. Renge çekmeli miyiz? Eğer kâğıt değiştirmek için ortaya 1 lira koymamız gerekiyorsa (bedava kâğıt değiştirilmez pokerde, şansını artırmanın bedeli vardır) ve kazanacağımız paranın en az 27/4 lira olacağını düşünüyorsak kâğıt çekmeliyiz. Yoksa çekmemeliyiz. Örneğin iki oyuncu oyundan kaçmışsa, büyük bir olasılıkla kâğıt çekmeye değmez. Eğer kâğıt çekmeye karar verecek son oyuncuysak ve bizden önceki üç oyuncu oyuna girmişlerse, o zaman kâğıt çekmeliyiz.

Dolgun El Sayısı. Eğer bir elde bir türden 3 tane, bir başka türden 2 tane kâğıt varsa, o ele "dolgun" (full house) denir. Örneğin, 3 as ve 2 papazdan oluşan bir el dolgundur. Dolgun eller oldukça iyi ellerdir. İlk beş kâğıdı dolgun görmenin kendine özgü bir zevki vardır. En azından, hangi kâğıdı değiştireceğim türünden zor sorularla karşılaşılmaz.

Elin dolgun olma olasılığını bulalım. Bu biraz daha zor. Önce 3 as ve 2 papaz gelme olasılığını bulalım. Dört astan üçünü seçeceğiz, yani 4 öğelik bir kümeden 3 öğelik bir altküme seçeceğiz. Teorem 2'ye göre,

$$\binom{4}{3} = 4$$

seçeneğimiz var aslar için. Şimdi de dört papazdan ikisini seçeceğiz. Yine Teorem 2'ye göre,

$$\binom{4}{2} = 6$$

seçeneğimiz var. Demek ki,

$$4 \times 6 = 24$$

tane 3 as ve 2 papazlı el var. 3 papaz ve 2 aslı eller de 24 tane. Yani as ve papazlardan oluşan

$$24 + 24 = 48$$

tane dolgun el vardır. Bu hesaplar salt as ve papazlar için değil, tüm iki tür kâğıtlar için de geçerli. Örneğin yedi ve dokuzlulardan oluşan 48 tane dolgun el vardır. Kaç tane iki tür kâğıt var? Toplam 8 türden 2 tür seçeceğiz. Teorem 2'ye göre,

$$\binom{8}{2} = 28$$

tane iki tür var. Demek ki toplam dolgun el sayısı,

$$48 \times 28 = 1344$$

tür.

Üçgen Sayısı. Bir elde 3 tane aynı kâğıt varsa, o ele "üçgen" adı verilir. Örneğin AAAKD bir üçgendir. Ama kare ve dolgunlar üçgen sayılmaz. Üçgen sayısını hesaplayalım. Önce 3 aslı üçgen sayısını bulalım. Teorem 2'ye göre,

$$\binom{4}{3} = 4$$

çeşit 3 as seçebiliriz. Bu 3 asın yanına iki kâğıt gelecek, ama herhangi iki kâğıt değil: hiçbiri as olmayacak ve aynı tür kâğıt olmayacaklar. As dışında 32 – 4 = 28 tane kâğıt var. Bunlardan ikisini seçelim:

$$\binom{28}{2} = 378$$

tane seçenek var. Ama bu seçeneklerden bazıları iki aynı tür kâğıttan oluşuyor. Bu sayıyı bulup 378'den çıkartalım. Kaç tane iki papaz seçebiliriz?

$$\binom{4}{2} = 6$$

tane. As dışında yedi tür kâğıt var. Demek ki, 378 seçenekten 6 × 7 = 42 tanesi iki aynı tür kâğıttan oluşuyor. Dolayısıyla, seçilen üç asın yanına,

$$378 - 42 = 336$$

tane iki kâğıtlık el koyabiliriz. Dört çeşit üç as seçilebildiğinden, aslı üçgen el sayısı,

$$336 \times 4 = 1344$$

dür. Bu hesap as dışındaki öbür kâğıtlar için de geçerli olduğundan, üçgen el sayısı,

$$1344 \times 8 = 10.752$$

dir.

Kalan hesapları okura alıştırma olarak bırakıyoruz. Yanıtları aşağıdaki dizelgede bulacaksınız. Matematiksel şeytanınız bol olsun[2].

El türü	El sayısı	olasılığı (±0,0005)
Flush Royal	5	%0,0025
Flush	20	%0,010
Renk	204	%0,101
Kare	224	%0,111
Dolgun	1.344	%0,667
Kent	5.100	%2,533
Üçgen	10.752	%5,339
İki Çift	24.192	%12,013
Bir Çift	107.520	%53,393

Poker Alıştırmaları

1. Aynı olasılıkları 52 kâğıtlık desteyle oynanan poker oyunu için hesaplayın.

2. Elinde bir çifti olan oyuncunun, diğer üç kâğıdını değiştirerek üçlü yakalama olasılığı kaçtır?

3. Elinde bir çifti olan oyuncunun, diğer üç kâğıttan ikisini değiştirerek üçlü ya da ikinci bir çift yakalama olasılığı kaçtır?

4. Elinde 4, 5, 6, 7 ve 10 olan oyuncunun 10'luyu değiştirerek kent yakalama olasılığı kaçtır?

5. Elinde 4, 5, 7, 8 ve 10 olan oyuncunun 10'luyu değiştirerek kent yakalama olasılığı kaçtır?

6. Elinde dört tane aynı renkten olan oyuncu, diğer kâğıdını değiştirerek renk yakalama olasılığı kaçtır?

7. Elinde beş benzemez olan oyuncu, iki çift ya da daha iyi bir el yakalama olasılığını artırmak için kaç kâğıt değiştirmelidir?

Sayma Alıştırmaları

1. n değişik nesne kaç değişik biçimde sıraya dizilebilir?

2. n kişi kaç değişik biçimde yuvarlak bir masaya oturtulabilir?

3. İkisi aynı diğerleri değişik n nesne kaç değişik biçimde sıraya dizilebilir?

4. Üçü aynı diğerleri değişik n kişi kaç değişik biçimde yuvarlak bir masaya oturtulabilir?

5. Üç tane 1 ve dört tane 2'yle yedi haneli kaç sayı yazılabilir? a tane 1 ve b tane 2'yle $a + b$ haneli kaç sayı yazılabilir?

5. a tane 1, b tane 2 ve c tane 3'le $a + b + c$ haneli kaç sayı yazılabilir?

6. 10 erkek ve 14 kız öğrenci olan bir sınıftan, 5 erkek ve 3 kız öğrenciden oluşan kaç takım oluşturulabilir? ♠

1 Bir elin kâğıtları peşpeşeyse, örneğin 7-8-9-10-V ise, ama aynı renkten (örneğin kupa) değilse, o ele her nedense "kent" denir.