

Dikkat Paradoks Var!

Sürpriz Sınav Paradoksu

Hayati Önem

Adamın biri, ne suç işlemişse, idama mahkûm olmuş. Hâkim, şöyle açıklamış son kararını:

– Önümüzdeki hafta bir sabah saat 5’te idam edileceksin. Ama hangi gün idam edileceğini bir gece önceden tahmin edemeyeceksin, deyip kalemini kırar...

Bilindiği üzere, ölüm cezası utanç verici bir uygulama olduğundan, uygarlıktan (iki değil!) bir nebze nasibini almış ülkelerde bu ceza şafak sökmeden, sabahın köründe ve gözlerden irak infaz edilir.

İdam mahkûmu perişan halde hüccesine döner. Yapacak başka şeyi olmadığından hüccesinde mecburen düşünür:

Eğer ilk altı sabah idam edilmemişsem, altıncı günün gecesi, ertesi sabah (yani yedinci sabah) idam edileceğimi bilirim elbette. Demek ki ilk altı sabahdan birinde idam edilmeliyim, hâkimin kuralına göre son sabah idam edilemem.

Aradan birkaç dakika geçer. Kimbilir hangi suçtan mahkûm olmuş (düşünce suçundan olmasın!) hükümlü düşünmeye devam eder:

Ama o zaman da, eğer ilk beş sabah idam edilmemişsem, yedinci sabah idam edilemeyeceğimden, altıncı sabah idam edilmem gerektiğini beşinci günün gecesi anlamış olurum, ki hâkimin dediğine göre anlayamam gerekir... Demek ki altıncı sabah da idam edilemem...

Gerisi doğal olarak kendiliğinden gelir:

Demek ki altıncı ve yedinci sabah idam edilemezler. Ama o zaman da, ilk dört sabah idam edilmemişsem, beşinci sabah idam edileceğimi dördüncü günün gecesi anlamış olurum. Demek ki beni ilk dört sabah idam etmeleri gerekir...

Böyle düşünüşüne haftanın birinci sabahı idam edilmesi gerektiğini anlar ki o zaman da ne zaman idam edileceğini daha şimdiden biliyordu.

“Demek ki beni idam edemezler...” diye sevinçle yatağa girer ve rahat bir uyku çeker.

Salı sabahı şafak sökmeden gardiyanlar infaz için hücceye girdiklerinde çok şaşırır elbet!

Bu paradoksun benzerlerini türetmek zor değildir. İşte bunlardan biri:

Bir öğretmen öğrencilerine,

– Önümüzdeki hafta sürpriz sınav olacak, der. Öğrenciler “sürpriz sınav” kavramı üzerine öğretmenden açıklama isterler. Öğretmen, tahmin edilen açıklamayı yapar:

– Yani, der öğretmen, önümüzdeki hafta sınav olacaksınız ama hangi gün sınav olacağınızı bir önceki gece bilemeyeceksiniz...

Öğrenciler yukardaki idam mahkûmu gibi düşünerek öğretmenin o hafta “sürpriz sınav” yapamayacağını bulurlar: Perşembe günü sınav yapılmamışsa, perşembe gecesi öğrenciler cuma günü sınav olacağını anlarlar, çünkü ertesi gün haftanın son günüdür. Demek ki sınav cuma yapılamaz, ille cumadan önce yapılmalı. Bu akıl yürütmeyle, sınavın, yapılması mümkün olan en son gün yapılamayacağı çıkar. Haftanın en son gününden başlayıp geriye doğru giderek, öğrenciler sınavın hiçbir gün yapılamayacağını anlarlar.

Tahmin edeceğiniz üzere, öğretmen salı günü sınav yaptığında öğrenciler çok şaşırır!

Bu bir paradoks. Hem de dışlılerinden... Hepimiz deneyimle biliyoruz ki öğretmenler sürpriz sınav yaparlar!

Bu deneme yazısında bu paradoksu çözümleneceğim.

İlk gözlemim şu olacak: Burada öğrenciden bir oyun oynaması isteniyor. Ama öğrenci oyunda tamamiyle pasif, karar aşamasında yer almıyor. Sadece düşünüyor ve sadece düşünerek oyunu paradoksal hale getiriyor. Oyunu kurallarına göre oynanabilmesi için öğrencinin düşünmemesi gerekiyor!

Gazoz Kapağı Oyunu. Yukardaki paradoksal oyunu bir an için şöyle değiştirelim. Biri, iki gazoz kapağından birinin altını kırmızıya boyayıp bu gazoz kapaklarını altları görünmeyecek biçimde önümüzde sıraya dizesin ve bize desin ki,

– İki saniye arayla bu gazoz kapaklarını sırayla açıp altlarına bak. Kapaklardan birinin altını kırmızıya boyadım. Hangi gazoz kapağının altının kırmızı olduğunu kapağı açmadan bir saniye önce tahmin edemeyeceksin...

Hatta kişinin gazoz kapaklarını sıraya dizmesine de gerek yok, istediğimiz sırayla gazoz kapaklarını açabilelim. Hatta, o ikinci kişi de bilmesin hangi gazoz kapağının altının kırmızıya boyandığını. Hatta ikinci kişi de olmasın; biz kendi kendimize oynayalım bu oyunu. Gazoz kapaklarından birinin altını boyadıktan sonra kapakları karıştıralım, hangisinin altının kırmızıya boyanmış olduğunu kapağın altına bakmadan bilemeyelim. Ve kurallarımız şöyle olsun:

1) Gazoz kapaklarının hepsini teker teker ve istediğimiz sırayla açıp altına bakacağız.

2) Bir gazoz kapağını açtıktan sonra, ikinci gazoz kapağını açmadan önce iki saniye kadar bekleyeceğiz.

3) Açacağımız gazoz kapağının altının kırmızıya boyanmış olduğunu kapağı açmadan bir saniye önce tahmin edemeyeceğiz.

Üçüncü kural biraz tuhaf. Bizden elimizde olmayan bir şey isteniyor. Gazoz kapağının altının kırmızıya boyanmış olduğunu önceden tahmin edemeyecekmiz... Oysa açtığımız birinci gazoz kapağının altı kırmızı değilse, ikinci gazoz kapağının altının kırmızı olduğunu tahmin etmememiz mümkün değil...

Öte yandan daha hiç kapak açılmamışken, bu kural ihlal edilmiş olmaz. Ayrıca ilk açılan kapağın altı kırmızıysa da bu kural ihlal edilmiş olmaz. Son kural, sadece ilk seçilen kapağın altı kırmızı çıkmazsa ihlal edilmiş olur.

Bu durumda paradoksu çözümlmek o kadar zor değil: Yüzde 50 olasılıkla ilk seçtiğim kapağın altı kırmızı olmaz ve oyunun kuralı ihlal edilmiş olur, yüzde 50 olasılıkla ilk seçtiğim kapağın altı kırmızıdır ve kural ihlal edilmiş olur. Sonuç: Bu oyun yüzde yüz olasılıkla kurallarına uyularak oynanamaz, yüzde 50 olasılıkla kuralları ihlal etmek zorundayız.

Öğretmen Zar Atarsa. Gelelim öğretmenin sürpriz sınavına. Hikâyeyi azıcık değiştirelim. Cumartesi dahil haftanın 6 günü okul olduğunu varsayalım. Öğretmen her sabah ders başladığında sınıfta öğrencilerinin önünde zar atsın. Eğer o sabah zar 6 ya da daha önceki sabahlarda gelmiş zarlardan biri gelirse o gün sınav olsun. Sürprizlik kuralı da hâlâ geçerli olsun.

Örneğin, pazartesi sabahı atılan zar 6'ysa sınav olsun, değilse olmasın. Diyelim pazartesi sabahı zar 5 geldi; o zaman o gün sınav olmaz. Salı sabahı gelen zar 5 ya da 6 olursa, salı sabahı sınav olur, yoksa olmaz. Diyelim salı sabahı 4 geldi ve o gün de sınav olmadı. Ertesi gün zar 4, 5 ya da 6 gelirse sınav olur, yoksa olmaz.

En geç altıncı gün yani cumartesi günü sınav olur, çünkü ilk beş gün sınav olmamışsa, yani ilk beş günde atılan zarlar 1'den 5'e kadar olan beş değişik zarsa, o zaman altıncı gün zar ne gelirse gelsin kesinlikle sınav olacak demektir; bu durumda, öğretmen de öğrenciler de altıncı gün sınav olacağını beşinci günün gecesinden bilirler, ertesi sabah zar atmaya gerek kalmaz bile...

Dolayısıyla ilk beş gün sınav olmamışsa, oyunun "sürprizlik" kuralı ihlal edilmiş olur. Demek ki $(5/6) \times (4/6) \times (3/6) \times (2/6) \times (1/6) = 10/648$ olasılıkla ilk beş günde 1'den 5'e kadar beş değişik zar gelir ve "sürprizlik" kuralı beşinci günün akşamı ihlal edilmiş olur. Geri kalan 638/648 olasılıkta oyunun kuralları ihlal edilmiş olmaz.

Dikkat ederseniz "paradoks" ortadan kalktı. Sadece bu oyunun yüzde yüz olasılıkla kurallarına uygun şekilde oynanamayacağını anladık.

Sürpriz Sınav Paradoksu. Şimdi zarı ortadan kaldıralım. Zar yerine öğretmen karar veresin sınavın hangi gün yapılacağına...

Biraz önceki oyunda, zar, istenci (iradesi) olmayan bir varlıktı ve o oyunda paradoks yoktu. Sadece kuralları 10/648 olasılıkla ihlal ediliyordu. Bu sefer, zarın görevini öğretmen üstlendi. Bu sefer kuralları zar değil öğretmen ihlal edecek.

Sınavın yapılıp yapılmayacağına öğretmen yerine zar karar verdiğinde paradoksun ortadan kalkması çok ilginç.

Oyuncular, oyunu kurallarını ihlal etmeden oynamak istiyorlar, yani bir anlamda, daha önce 10/648 olan oyunun kurallarının ihlal edilme olasılığını 0 yapmak istiyorlar. Belli ki bu müm-

kün değil. Bu oyun kuralları ihlal edilmeden oynanamaz.

Öğretmen salı günü sınav yapsa sınav gerçekten sürpriz olur. Öğrenciler öğretmene,

– Ama hocam... deyip o gün sınav olamayacağını açıklamaya çalışsalar, o zaman, öğretmen,

– Siz sınav yapamayacağımı sandınız, ama işte yapıyorum ve bu sizin için gerçekten bir sürpriz oldu. Sözümde durdum... der.

Burada şu kesin: Öğretmen, oyunun kurallarını ihlal etmek zorunda, öğrenciler de bunu biliyorlar. Oyunun kuralları öğretmenin oyunun kurallarını ihlal etmek zorunda olduğunu söylüyor. Öğretmen oyunun kurallarını ihlal etmezse de (yani öğretmen sınav yapmazsa da) oyunun kuralları ihlal edilmiş olacak.

Bu oyunda sadece öğretmen hamle yapıyor. Öğrenciler pasif, onların hamle yapma şansları yok. Öte yandan öğrenciler oyunun bir parçası da: Öğrencilerin öğretmenin sınav hamlesini önceden öngörememeleri gerekir. Aslında öğrenciler bu oyunda oyuncu değil hakemler, çünkü hamle hakları yok, sadece öğretmenin yapacağı bir hamlenin yasal olup olmadığına karar veriyorlar.

Oyundan sürpriz öğesini atarak oyunu şöyle kuralım:

- 1) Oyun 7 hamle sürer.
- 2) A hamlesi (sınav) kuraldışıdır.
- 3) A hamlesi (sınav) mutlaka yapılmalı.

Bu oyun paradoksal bir oyun, çünkü kuraldışı bir hamle yapılması gerektiğini söylüyor, yani oyunun kurallarına göre oynanamayacağını söylüyor.

Bu oyunla sürpriz sınav oyunu özünde aynı oyunlardır. Sınavın ne zaman yapılacağını önceden bilemeyeceğimizi kuraldışı olduğuna karar verdiğimiz A hamlesine yedirdik.

Bu oyunu oynayan oyuncu ya kuraldışı A hamlesini yapacak ya da üçüncü kuralı ihlal edecek. Her iki olasılıkta da oyunun kuralları ihlal edilmiş olacak.

Bu oyunu kaybeden aslında öğrenciler değil, kurallarına göre oynayamadığından öğretmen... Sınav olarak cezayı çeken öğrenciler olması oyunu öğretmenin kaybettiği gerçeğini değiştirmiyor. Öğrenciler sadece kurban ediliyorlar.

Öğretmen öğrencilere,

– Yarın sınav olacaksınız ama yarın sınav olacağınızı önceden bilemeyeceksiniz, de diyebilir ve öğrenciler de ertesi gün sınav olamayacaklarına hükmedebilirdi.

Yani yukardaki paradoksal oyun yedi hamle yerine bir hamle sürebilirdi. O zaman sürpriz öğe ortadan kalkardı tabii. Kuraldışı hamlenin ne zaman yapılacağı önceden bilinirdi.

Ama aynı oyun birden çok hamle oynanırsa, kuraldışı hamlenin ne zaman yapılacağı önceden tahmin edilemeyeceğinden, kuraldışı hamlenin yapıldığı hamle sürpriz hamle olur.

7 hamlelik oyuna geri dönelim. Oyuncunun üçüncü kuralı hiçbir şekilde ihlal edemeyeceğini varsayalım. (Yani sınav yapılmalı, notlar idareye teslim edilecek ya da müfettiş gelecek, bir nedenden sınav mutlaka yapılmalı.) Demek ki bu durumda oyuncu kuraldışı olan A hamlesini 7 hamleden birinde yapmak zorunda. Hangi hamlede A hamlesini yapacağını bilmiyoruz.

Burada sürpriz olan A hamlesinin yapılmış olması değildir. A hamlesi kuraldışı da olsa kesinlikle yapılacaktır, bu kesin, burada sürpriz olan A hamlesinin kaçınıcı hamlede yapılacağıdır, yani oyunun kurallarının kaçınıcı hamlede ihlal edileceğidir.

Sınav paradoksuna geri dönecek olursak... Öğrenciler için sürpriz olan sınavın yapılması değildir. Sınavın yapılamayacağını ama sınavın gene de yapılacağını öğrenciler de öğretmen de biliyor. Sürpriz olan “öğretmen sınav yapamaz” kuralının ne zaman ihlal edileceği.

Öğrenciler şöyle düşünmeli: Öğretmen sınav yaparak oyunun kurallarını önümüzdeki hafta ihlal edecek, bakalım hangi gün oyunun kuralını ihlal edecek...

Öğretmen oyunun kurallarını ilk gün de son gün de ihlal edebilir.

Öğretmen sınav yaptığında sürpriz olan sınavın yapılması değildir. Sürpriz olan, olsa olsa sınavın o gün yapılmış olmasıdır. A hamlesinin yapılmasıyla A hamlesinin ne zaman yapılacağı apayrı şeyler, bunları birbirine karıştırmamak lazım. Yani sürpriz olan sınavın (kuraldışı hamlenin) yapılacağı gündür. ♣