Geometri Köşesi

Ali Nesin
anesin@bilgi.edu.tr

Öklid Geometrisinin Belitleri

Matematiği belitsel (aksiyomatik) olarak yazılı ilk yansıtan Öklid'dir. Elemanlar (MÖ 300) adlı kitabında, ki bu kitap bin yıldan fazla Batı'da ders kitabı olarak okutulmuştur, geometri için aşağıdaki beş beliti (aksiyomu) vermiştir:

1. *Herhangi iki noktadan bir doğru geçer.*

2. *Herhangi bir doğru parçası sonsuza kadar bir doğru olarak uzatılabilir.*

3. *Bir doğru parçası verildiğinde, merkezi, verilen doğru parçasının bir ucunda olan, yarıçapı ise verilen doğru parçası olan bir çember çizilebilir.*

4. *Tüm dik açılar eştir.*

Son belit için koltuğunuza iyice yapışın:

5. *Eğer iki doğru parçası üçüncü bir doğru parçasını, dar iç açılarının toplamı iki dik açıdan az olacak biçimde keserse, o zaman ilk iki doğru parçası, yeterince uzatılırsa, üçüncü doğrunun toplanan iç açılarının olduğu tarafta kesişirler.*

Tarihsel olarak bunlara belit değil ***postulat*** denir. "Belit" denen önermeler,

$$x = y \text{ ve } y = z \text{ ise o zaman } x = z$$

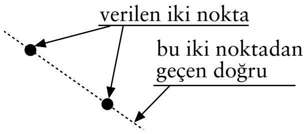
gibi sadece geometriye değil, tüm matematiğe ve hatta mantığa ve düşünmeye özgü çok genel önermelerdir. Biz daha modern bir terminoloji kullanarak Öklid'in postulatlarına belit diyeceğiz.

Belitlerin Anlamı

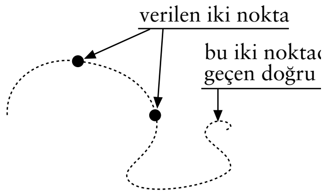
Yukardaki belitleri teker teker ele alalım.

Birinci belitin ne dediği çok belli: Verilen iki noktadan bir doğru geçer diyor. Bundan daha açık bir şey olamaz.

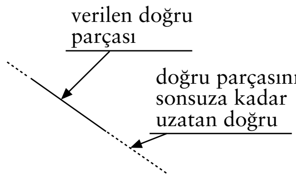
Yalnız, dikkat edelim, bu belit, iki noktadan **tek bir** doğrunun geçtiğini söylemiyor; bu iki noktadan geçen en az bir doğru olduğunu söylüyor. İki noktadan **tek bir** doğrunun geçtiği diğer belitler kullanılarak kanıtlanmalıdır.



Yukarda açıklama amacıyla çizdiğimiz şekli aşağıdaki gibi çizseydik acaba okurun kafası karışır mıydı? Karışmasın! Bu, sadece ve sadece bir resim... Soyutlamayı daha daha abartıp noktaları doğru olarak doğruları da nokta olarak çizebilirdik ama her şeyin bir sınırı olduğunu düşündük.

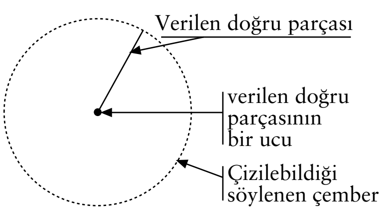


İkinci belitin de ne dediği oldukça açık: Bir doğru parçası sonsuza kadar bir doğru olarak uzatılabilir diyor, daha ne desin!

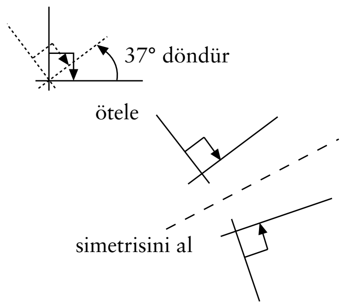


Ama gene dikkat! Belit, doğru parçasının **tek bir** doğru olarak uzatılacağını söylemiyor. Doğru parçasının **tek bir** doğru olarak uzatılacağı mümkünse diğer belitler kullanılarak kanıtlanmalı.

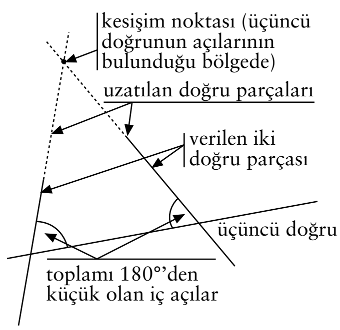
Üçüncü belitin de anlamı çok belli. Daha daha anlaşılsın diye yanda bir resmini yaptık.



Dördüncü belitte "eşlik" diye bir sözcük geçiyor. Herhalde bu belit, bir dik açının bir başka dik açının üstüne (ötelenerek, döndürülerek ve bir doğruya göre simetrisi alınarak, yani mesafeleri değiştirmeyen dönüşümler uygulanarak) taşınabileceğini söylüyor. Beliti bu anlamda anlamak lazım.



Beşinci belit, ne yalan söyleyelim anlaması zor, anladıktan sonra yazması daha da zor.



Şekli bir önceki sayfada kaldı. Bu belit aslında "paralel olmayan doğrular kesişir ve kesişim noktası da doğruların birbirine yaklaştığı taraftadır" demek istiyor.

Belit Nedir?

Geometrinin belitleştirilişi (aksiyomatikleştirilişi) sadece matematik tarihinde değil, insanlık tarihinde bir devrimdir, hatta devrimlerin en önemlilerindendir. Nasıl "tekerleğin icadı" insanlık tarihinde (biraz simgesel de olsa) bir dönüm noktası olarak addedilirse, bu da öyledir.

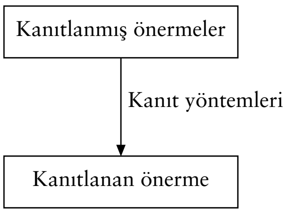
Belit, doğruluğu tartışılmadan kabul edilen önerme demektir.

Dikkat! "Belitler doğrudur"dan bambaşka bir şey söyledik. "Belitler doğrudur" demedik kesinlikle. Belitler, sadece kabul edildiklerinde doğruluğu tartışılmayan önermelerdir. Sadece kabul edildiklerinde... Kimse belitleri kabul etmek zorunda değil. Ama kabul edildiklerinde, artık tartışılamazlar.


Öklid

Belit Olmadan Asla!

Belitler matematikte gereklidir, belitler olmadan matematik yapılamaz, hatta matematiğe başlanamaz bile! Çünkü matematik tümdengelen bir uğraş dalıdır, yani genelden özele iner; matematikçi daha önce kanıtlanmış önermelere ***çıkarım kuralları*** denilen bazı akıl yürütme (kanıt) yöntemleri uygulayarak yeni önermeler kanıtlar. Ve çıkarım kuralları öyle kurallardır ki, eğer uygulandıkları önermeler doğruysa, o zaman elde edilen (yani "kanıtlanan") yeni önerme de doğrudur. Tabii burada mantıksal anlamda "doğru"nun ne demek olduğunu da açıklamak gerekir, ama bunu bir başka yazımızda yaparız.



Daha önce kanıtlanmış önermelerimiz yoksa yeni bir önerme kanıtlayamayız, çünkü çıkarım kurallarımıza uygulayacağımız önermeler olmalıdır. Çıkarım kuralları, "şu, şu ve şu önermeler ise o zaman bu önerme" türündendir. İlla ve illa "şu, şu ve şu önerme" olmalı. Hiçbir çıkarım kuralı doğrudan bir önermeyi vermez, başka önermeleri temel alarak yeni önermeler verir.

Belitler olmadan ilk önermemizi kanıtlayamayız; belit yoksa ve henüz hiç teorem kanıtlanmamışsa, yani daha işin en başındaysak, çıkarım kurallarımızı hangi önermelere uygulayacağız? İlla bir başlangıç noktamız olmalı. Nasıl yoktan bir şey varolmazsa, varsayım olmadan bir gerçek de elde edilemez. Bir gerçeğe ancak bir başka gerçekten hareket ederek ulaşabiliriz.

Belitler olmadan ilk kanıtımıza başlayamayız. Dolayısıyla kabul edilmiş belitler olmadan birinci önermemizi kanıtlamamız mümkün değildir. Belitler işte bu yüzden gereklidir.

Bizim belitlerimizi beğenmiyorsanız kendinize başka belitler beğenin, ama mutlaka en az bir belitiniz olsun. Belitsiz matematikçi dilsiz sopranoya benzer.

Belitlerin Özellikleri

Her aklına esen her önermeyi belit olarak kabul edemez. Bir belitin diğer belitlerden hareketle kanıtlanamıyor olması arzu edilir. Neden derseniz... Güzel olmaz da ondan! Başka hiçbir nedeni yok. Kanıtı olan bir önermeyi neden **kanıtsız** doğru varsayalım ki!

Oldu olacak doğru olan bütün önermeleri belit olarak kabul edin de kanıt denen dertten kurtulun!

Örneğin Pisagor Teoremi yukardaki belitlerden hareketle kanıtlanabildiğinden (sanırım kanıtlanabilir, emin değilim, çünkü bu belitlerde önemli birkaç eksik var, örneğin bu belitlerle kesişmesi gereken bazı çemberlerin kesişeceği, dolayısıyla bazı üçgenlerin varlığı kanıtlanamaz), Pisagor Teoremi'nin bu belitler arasında bulunması yakışık almaz. Buna ***belitlerin bağımsızlığı*** ilkesi denir.

Ayrıca, belitler, kanıtlanamayan ama "doğruluğu su götürmeyen" önermelerden oluşmalıdır. Örneğin hiç de bariz olmayan Morley Teoremi'ni [bkz. MD-2003-IV, sayfa 64-69], kanıtlanmış bir önerme olmasaydı bile, bir belit olarak kabul etmemeliyiz. Bu arada, belitlerde artık bu son özelliğinin aranmadığını da belirtelim. Bu paragrafta ifade edilen geçmişte kalmış bir arzudur.

Beşinci Belit

Eski Yunandan beri matematikçiler Öklid'in ilk dört belitinin "doğruluğu çok belli olan" önerme oldukları konusunda hemfikir olmuşlar, ancak beşinci belitin doğruluğunun pek o kadar da bariz olmadığını düşünmüşlerdir. Dolayısıyla beşinci belitten rahatsız olmuşlar, bu önermenin belitler arasında bulunmaması gerektiğini düşünmüşlerdir.

Öklid bile bu belitten rahatsız olmuş olmalı ki, Elemanlar'da kanıtladığı ilk 28 önermede beşinci beliti kullanmayıp sadece ilk dört belitle yetinmiş, ama daha fazla dayanamayıp 29'uncu önermede beşinci belite başvurmuştur.

Sadece ilk dört beliti kabul eden geometriye ***mutlak geometri*** denir. Oldukça basit bir geometri olduğundan pek revaçta değildir.

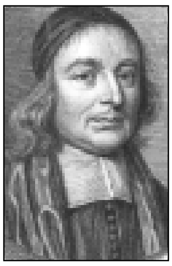
Beşinci Belit sorunu karşısında matematikçilere iki seçenek kalıyor: Ya bu belitin yerine daha doğal ve doğruluğu daha bariz görünen bir belit kabul edilecek ya da bu belit diğer dört belitin yardımıyla kanıtlanacak.

Birinci seçenek yolunda ilerlemeler kaydedilmişse de, ikinci seçenek yüzyıllar boyunca başarısızlığa uğramıştır.

Birinci Seçenek. Beşinci belit şu önermeyle eşdeğerdir (yani biri doğruysa diğeri de doğrudur):

Bir doğruya bu doğrunun üstünde olmayan bir noktadan tek bir paralel geçer.

Ancak bu önerme de "yeterince bariz" kabul edilmez.


John Wallis

John Wallis beşinci belit yerine doğruluğu sezgisel olarak daha kolay kabul edilebilecek şu önermeyi sunmuştur:

Herhangi bir üçgen, açıları değiştirilmeden ve oranları bozulmadan istendiği kadar büyütülebilir ya da küçültülebilir.

Ama Wallis'in bu önerisi pek dikkat çekmemiştir. Anlaşılan matematikçiler tüm dikkatlerini beşinci beliti kanıtlamaya dikmişler ve birinci seçeneği işin kolayına kaçmak olarak algılamışlar.

İkinci Seçenek. Matematikçiler ne yapıp etmişlerse de, birtürlü beşinci beliti diğer belitlerden hareketle kanıtlayamamışlardır. Bunu nerdeyse bir onur ve gurur sorunu haline getirmişken, 1823'te beşinci belitin kanıtlanamayacağı anlaşılmış (Janos Bolyai ve Lobachevski ve sessizce Gauss) ve Öklid-dışı geometriler keşfedilmiştir. Bolyai, Lobachevski ve Gauss'un bulduğu geometride bir doğruya bir noktadan sonsuz tane paralel geçer. Daha sonra Riemann, paralel doğruların hiç olmadığı, yani tüm doğruların kesiştiği geometriler keşfetmiştir. Söylemeye gerek var mı: Tüm bu geometrilerde ilk dört belit doğrudur.

Bu çok ama pek çok önemli konuyu bir başka sayımızda oldukça ayrıntılı bir biçimde işleyeceğiz. Biz esas konumuza geri dönelim.

Tanımsız Terimler

Öklid'in bu belitleri biraz fazla insansal, duyularımıza ve sezgilerimize biraz fazla sesleniyor. Örneğin "sonsuza kadar uzatmak" ya da "iç açıların olduğu tarafta" ne demektir?

Belitlerin tam ne dedikleri belli olmalı, tartışmaya yer kalmamalı. Bu belitlerin ne dedikleri tam belli değil.

Öte yandan Öklid'in belitlerinde olduğu gibi böyle tanımlanmamış terimlerin olması çok doğal ve hatta kaçınılmaz.

Şöyle bir örnek vereyim: Diyelim Macarca tek bir kelime bilmiyorsunuz ve elinizde Macarcadan Macarcaya bir sözlük var. Sözlükte Macarca bir sözcüğe bakıyorsunuz anlamını anlamak için. Sözcüğün tanımı da Macarca olduğundan, tanımı anlayamıyorsunuz elbette. Bu sefer tanımda bulunan sözcüklere bakıyorsunuz sözlükte. Onların da tanımı Macarca... Sözlükte bunlara da bakmanız gerekiyor... Bu böyle sürer gider. Bir kelime Macarca bilmediğinizden, Macarcadan Macarcaya bir sözlüğe bakarak tek bir Macarca kelime öğrenemezsiniz! Oysa birkaç kelime bilseniz... Hiyeroglif de böyle çözülmemiş midir? Bir kral adı, bir savaş adı okunur okunmaz gerisi çorap söküğü gibi gelmiştir.

Matematikte de aynen böyledir. Tanımı verilmeyen terimler olmalıdır. Bu tanımı verilmeyen terimleri bildiğimizi varsayıp başka şeyler anlamaya ve anlatmaya çalışmalıyız.

Tanımı verilmeyen bu terimlere ***asal terimler*** denir. Asal terimsiz derdimizi anlatamayız.

Asal terimler için çeşitli seçeneklerimiz olabilir. Eğer T kavramından S kavramı ve S kavramından T kavramı tanımlanabiliyorsa, o zaman T terimini asal terim olarak kabul edeceğimize S terimini asal terim olarak kabul edebiliriz, ya da tam tersini yapabiliriz. Seçim matematikçinin zevkine kalmıştır.

Ne de olsa asal terimlerin olabildiğince "doğal" kavramlar olması gerekir ve neyin "doğal" olup olmadığı da kişiden kişiye değişebilir.

Sadece "küme" ve "elemanı olmak" kavramlarını asal terim olarak kabul edip kümeler kuramıyla işe başlayabilir ve geometri de dahil olmak üzere tüm matematiği inşa edebiliriz. Ama bunu yapmak herkesin işine gelmeyebilir. Örneğin bir lise öğrencisinin geometri öğrenmek için ta kümeler kuramından başlaması pek pedagojik sayılmaz. O zaman sadece geometriyi inşa etmek için "nokta", "doğru", "düzlem" gibi asal terimler kabul edilir. Ama bu asal terimlerin kümeler kuramından hareketle matematiksel olarak tanımlanabileceğini bilinmelidir.

Aynı şey belitler için de geçerlidir. Bir kısmını MD-2003-IV sayısında verdiğimiz kümeler kuramının belitleriyle, geometri de dahil olmak üzere tüm matematiği inşa edebiliriz. Ama sadece geometriyi öğrenmek isteyen biri için bu hiç de pratik bir yöntem değildir. Sadece geometriyi öğrenmek isteyen birine doğrudan geometrinin belitleri verilmesi her şeyi çok daha kolaylaştırır, ama bu kişi geometrinin belitlerinin kümeler kuramının belitleriyle kanıtlanabileceğini bilmelidir.

Ve Hilbert Sahnede!

David Hilbert

Hilbert, 1899'da Geometri'nin Temelleri (Grundlagen der Geometri) adlı yapıtında Öklid'in yapmak istediğini (bugünkü anlamda) çok daha matematiksel olarak yapmıştır.

Yazının devamında Hilbert'in Öklid geometrisinin belitlerini vereceğiz.

Önce Hilbert'in kabul ettiği asal terimlerin listesini vermemiz gerekiyor. Bunlar tam 6 tanedir:

- Nokta
- Doğru
- Düzlem
- Üstünde / İçeriyor
- Arasında
- Eş

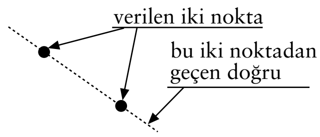
Bu terimlerin anlamını anlamaya çalışmayacağız, anlayamayız da. Bunları böylece tanımsız kabul edeceğiz ve kullanacağız. Ama, örneğin, "üçgen"i matematiksel olarak yukardaki terimleri kullanarak tanımlamamız gerekir, "üçgen"i tanımlamadan "üçgen"den sözedemeyiz.

"Nokta" elbette sezgilerimizle algıladığımız "nokta" yerine kullanılacak, ama tam matematiksel tanımı sadece geometri kullanılarak verilemez. "Nokta" (matematiğin değil ama) geometrinin asal terimlerinden biridir.

İlk üç terim (nokta, doğru ve düzlem) nesne adları, son üç terim ise iki ya da üç nesne arasındaki olası ilişkilerin adları. Örneğin bir doğru bir düzlemin üstünde olabilir ya da olmayabilir, bir nokta bir doğru ya da bir düzlem üstünde olabilir ya da olmayabilir, bir nokta diğer iki noktanın arasında olabilir ya da olmayabilir. Eşlik ilişkisi ise ilerde tanımlanacak olan "doğru parçaları" ve "açılar" arasında bir ilişki olacak. İki doğru parçasının ya da iki açının eş olması, sezgisel olarak o doğru parçalarının uzunluklarının ya da o açıların ölçülerinin eşit olması anlamına gelecek.

Hilbert'in ilk belitini şöyle yazabiliriz:

Verilmiş herhangi iki noktayı içeren bir doğru vardır.



Bu aynen Öklid'in birinci beliti. Arada hiçbir fark yok. Ancak Hilbert en azından nokta ve doğru kavramlarının tanımlanmadan verilmesi gerektiğini söylemiş.

İşte Hilbert'in geometri belitleri.

I. Kapsam Belitleri

Hilbert'in ilk iki belitini tek bir belitte toparlamakta bir sakınca görmüyoruz:

I.1-I.2. *Verilmiş herhangi iki değişik noktayı içeren tek bir doğru vardır.*

A ve *B* noktalarından geçen bu doğruya bundan böyle *AB* adını verelim.

I.3. *Her doğru en az iki nokta içerir. Ayrıca, aynı doğru üstünde olmayan (yani* ***doğrusal*** *olmayan) en az üç nokta vardır.*

Bu son belitin birinci kısmı çok basit geometrileri ilgi alanımız dışında bırakmak için yazılmıştır. Okur, eğlenmek için, her (ya da en az bir) doğrunun en fazla iki nokta içerdiği "dejenere" geometrileri bulmaya çalışabilir.

Biçimsel Yazılım

Daha matematiksel olmak istiyorsak şöyle yapmalıydık: P, noktalar kümesi ve L de doğrular kümesi olsun. Bir A nesnesinin nokta olduğunu belirtmek için $P(A)$, bir l nesnesinin doğru olduğunu belirtmek için $L(\mathsf{l})$ yazalım. Eğer bir A noktası bir l doğrusunun üstündeyse (ya da l doğrusu A noktasını içeriyorsa), $A \in \mathsf{l}$ yazalım. O zaman, "verilmiş herhangi iki değişik noktayı içeren bir doğru vardır" önermesi şöyle yazılabilir: $P(A)$ ve $P(B)$ ise, öyle bir l vardır ki

$$L(\mathsf{l}),\ A \in \mathsf{l} \text{ ve } B \in \mathsf{l}.$$

Matematiksel dilde bu da şöyle yazılır:

$$\forall A\, \forall B\, ((P(A) \wedge P(B)) \rightarrow \exists \mathsf{l}\ (L(\mathsf{l}) \wedge A \in \mathsf{l} \wedge B \in \mathsf{l}))$$

Hilbert'in aklında olan bu son yazılımdır. Ancak biçimsellik böyle uç noktada alındığında, matematik ruhsuz ve hatta anlamsız bir uğraş alanı olur. Önemli olan belitleri yukardaki gibi biçimsel olarak yazmak değil, az ya da çok uğraşarak belitlerin böyle biçimsel olarak yazılabileceğini bilmektir. Yukardaki biçimsel yazılımın okunuşu şöyledir:

$\forall A$	:	A ne olursa olsun,
$\forall B$	:	B ne olursa olsun,
$P(A)$	:	[eğer] A bir noktaysa
$\wedge$	:	ve
$P(B)$	:	B bir noktaysa,
$\rightarrow$	:	o zaman
$\exists \mathsf{l}$	:	öyle bir l vardır ki,
$L(\mathsf{l})$	:	l bir doğrudur
$\wedge$	:	ve
$A \in \mathsf{l}$	:	A, l doğrusundadır
$\wedge$	:	ve
$B \in \mathsf{l}$	:	B, l doğrusundadır.

Sezgisel olarak ve alışageldiğimiz eğitimde, bir doğru, üstünde bulunan noktalar kümesidir. Ama Hilbert'in sunduğu biçimde öyle değil, bir doğru, noktalarının kümesi olarak tanımlanmadı, hatta hiç tanımlanmadı, tanımsız terim olarak alındı. Ama artık bir doğruyu üstündeki noktalar kümesi olarak algılayabiliriz. Nitekim, birinci belite göre, iki doğrunun sadece iki noktası ortaksa bile bu iki doğru birbirine eşit olurlar ve ikinci belite göre de her doğrunun üstünde en az iki nokta vardır. Bundan böyle bir doğruyu üstündeki noktalar kümesi olarak algılamanın hiçbir mahsuru yoktur.

Her düzlemi de üstündeki noktalar kümesi olarak algılayabileceğiz. Umarız okur hangi belitlerden hareketle böyle bir varsayımda bulunabileceğimizi algılayabilecektir.

I.4-I-5. *Doğrusal olmayan herhangi üç noktayı içeren tek bir düzlem vardır. Her düzlemde en az bir nokta vardır.*

A, B ve C'yi içeren bu bir tane olduğunu bildiğimiz düzleme bundan böyle ABC adını verelim.

Şimdilik bir düzlemde doğrusal olmayan üç nokta olduğunu bilmiyoruz. Bu, ilerdeki belitler kullanılarak kanıtlanabilir.

I.6. *İki nokta bir düzlemdeyse, o iki noktadan geçen doğrunun tüm noktaları da o düzlemdedir.*

Yukardaki belitlerden, bir doğruyu ve o doğruda bulunmayan bir noktayı içeren tek bir düzlemin olduğu kolaylıkla kanıtlanır. Ayrıntıları okura bırakıyoruz.

I.7. *Eğer iki düzlemin ortak bir noktası varsa, ortak bir başka noktası daha vardır.*

Yukardaki belitlerden kesişen iki düzlemin tam bir doğruda kesiştikleri kanıtlanabilir. Böylece geometrinin boyutunun 3'ten büyük olmadığı anlaşılır (yoksa tek noktada kesişen düzlemler olurdu, örneğin dört boyutlu geometride $x = y = 0$ ve $z = t = 0$ düzlemleri sadece (0, 0, 0, 0) noktasında kesişirler.)

I.8. *Aynı düzlemde olmayan dört nokta vardır.*

Bu belit tek düzlemi olan geometrileri kapsam dışında bırakmak için yazılmıştır. Yani düzlemin boyutu en az 3 olmalıdır. Böylece bu belitlerin tanımladığı düzlem tam 3 boyutlu olacaktır.

II. Sıralama Belitleri

"Arasındalık" kavramını da tanımlamadan kabul ettiğimizi anımsatırım. Arasındalık bir ilişkidir, üç nokta arasında bir ilişki. Sezgisel olarak, "A noktası B ve C noktaları arasındadır" demek, bu üç nokta aynı doğru üstündeler, birbirinden değişikler ve A noktası gerçek hayatta hissettiğimiz anlamda B ve C noktaları arasındadır olarak yorumlanmalıdır.

Eğer A noktası B ve C noktalarının arasındaysa, bunu A-B-C gibi görsel olarak gösterebiliriz.

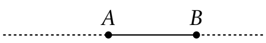
II.1. *Eğer bir A noktası B ve C noktalarının arasındaysa, o zaman bu üç nokta birbirinden değişiktir ve doğrusaldırlar. Ayrıca A noktası C ve B noktalarının da arasındadır.*

Bu belit arasındalık ilişkisinin tahmin ettiğimiz gibi bir ilişki olduğunu söylüyor. Son kısım *B-A-C* ise *C-A-B*'dir diyor. Bir sonraki belit, noktaların "yoğun" olduğunu söyleyecek:

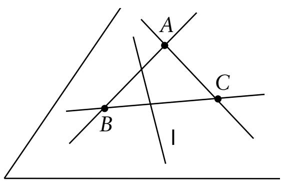
II.2. *Herhangi iki nokta arasında bir başka nokta vardır.*

II.3. *Doğrusal üç değişik nokta verildiğinde bunlardan biri ve sadece biri diğer ikisinin arasındadır.*

Bundan böyle *A* ve *B* arasındaki noktalar kümesini [*AB*] olarak gösterelim. Bu kümeye bir de ayrıca *A* ve *B* noktalarını ekleyelim. II.1'den [*AB*]'nin her noktasının *AB* doğrusunda olduğu anlaşılır. [*AB*]'ye ***doğru parçası*** ya da (***kapalı***) ***aralık*** diyelim.



II.4. *A, B ve C doğrusal olmayan üç nokta olsun.* l*, ABC düzleminde bir doğru olsun. Eğer* l*, [AB]'nin bir noktasından geçiyorsa, o zaman* l*, [AC] ya da [BC]'nin de bir noktasından geçer.*

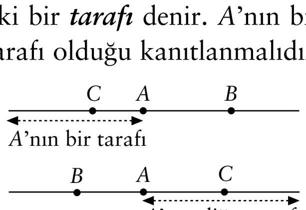


Arasındalık ilişkisinin her doğru üzerinde birbirinin zıddı iki sıralama verdiğini okur farketmiş olabilir. Bir sonraki bölümde bunu işleyeceğiz.

III. Eşlik Belitleri

Eşlik de sıralama gibi bir ilişkidir, iki doğru parçası (ya da birazdan tanımlayacağımız iki açı) arasında bir ilişki. "İki doğru parçası eş" demek, sezgisel olarak, bu doğru parçalarının uzunlukları aynı demektir.

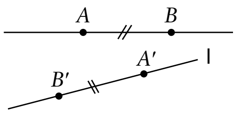
A herhangi bir nokta ve l, *A*'dan geçen herhangi bir doğru olsun. l üstünde *A*'dan değişik herhangi bir *B* noktası alalım. *A*'nın, *B* ve *C* noktalarının arasında olduğu *C* noktalar kümesine *A*'nın l'deki bir ***tarafı*** denir. *A*'nın bir doğru üzerinde iki tarafı olduğu kanıtlanmalıdır.



A'nın *B*'yi içeren tarafına *AB* ***ışını*** adı verilir. *AB* ışınının ***başlangıç noktası*** *A*'dır. Bazen *AB*'nin bir doğru değil de bir ışın olduğunu belirtmek için *AB*'nin üstüne soldan sağa doğru bir ok konur, ama biz yazılımı ağırlaştırmamak taraftarıyız.

Bir sonraki belit bir doğru parçasını uzayda uzunluğunu bozmadan istediğimiz gibi dolaştırabileceğimizi söylüyor:

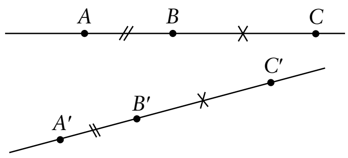
III.1. *A ve B iki farklı nokta olsun.* l *herhangi bir doğru ve A′,* l *üzerinde herhangi bir nokta olsun. O zaman A′ noktasının* l*'deki herhangi bir tarafında [AB] ve [A′B′] doğru parçalarının eş olduğu bir B′ noktası bulunabilir.*



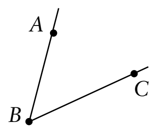
III.2. *Eğer iki doğru parçası üçüncü bir doğru parçasına eşse, o zaman o iki doğru parçası da eştir.*

Eğer [*AB*] ve [*CD*] doğru parçaları eşse (eşlik'in tanımsız bir terim olduğunu unutmayalım), bunu [*AB*] ≈ [*CD*] olarak gösterelim.

III.3. *A, B ve C noktaları doğrusal olsun. Sadece B noktasının hem [AB] hem de [BC] doğru parçaları üstünde olduğunu varsayalım. A′, B′ ve C′ aynı özellikleri sağlayan üç nokta olsun. Eğer [AB] ≈ [A′B′] ve [BC] ≈ [B′C′] ise, o zaman [AC] ≈ [A′C′].*



Sıralı verilmiş üç değişik *A*, *B*, *C* noktasına *ABC* ya da ∠*ABC* ***açısı*** adı verilir. *B* noktasına *ABC* açısının ***tepe noktası*** denir. *ABC* açısı *BA* ve *BC* ışınlarıyla (*BA*, *BC*) olarak da ifade edilebilir.

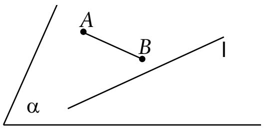


ABC yazılımı, hem bu noktalardan geçen bir düzlemi hem de bir açıyı temsil ediyor. Birazdan ayrıca bir de bir üçgeni temsil edecek! Karışıklığa neden olabilir mi? Olabilir, ama az bir ihtimal. Sadece birazcık dikkatli olmak gerekiyor o kadar. Çok gerekiyorsa bu üç yazılım arasında küçük işaretler yardımıyla ayrım yapılabilir. Bizim buradaki amacımız yazılımı standart hale getirmek ya da gelecekte karşılaşılacak zorlukları engellemek değil, amacımız sadece Hilbert'in belitlerini sunmak. Bunun için de en kolayımıza gelen yazılımı kabul ediyoruz.

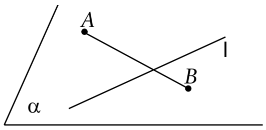
Aynı şey tanımlar için de geçerli olacak. Bir üçgenin okullarda nasıl tanımlandığını bilmiyorum (ve umurumda da değil!) Birazdan üçgeni üç değişik ve sırasız nokta kümesi olarak tanımlayacağım. Eğer amacıma ulaşmak için bu tanım işime ve kolayıma geliyorsa, bu tanımı kabul edeceğim. Sonuç olarak bu dergi bir mühendislik dergisi değil, soyut matematik dergisi!

Devam edelim.

α bir düzlem ve l, α düzleminde bir doğru olsun. *A* ve *B* noktaları, α düzleminde olan ama l'de olmayan iki nokta olsunlar. Eğer [*AB*] doğru parçası l doğrusunu kesmiyorsa, *A* ve *B* noktaları l'nin ***aynı tarafında***dır denir. α düzleminde olan



Aynı tarafta olan noktalar



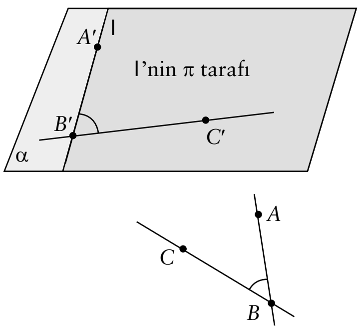
Ayrı taraflarda olan noktalar

her l doğrusu α'da olan ama l'de olmayan noktaları kesişmeyen iki altkümeye ayırır ve bu sayede l'nin aynı tarafında ya da ayrı taraflarda olan noktalardan sözedebiliriz.

Eşlik ilişkisini tanımsız olarak açılara da uygulayacağız.

Aslında doğru parçalarının eşliğinden açıların eşliği (üç kenarı eş üçgenler sayesinde) tanımlanabilir. Dolayısıyla eşlik ilişkisi sadece doğru parçaları için tanımsız olarak sunulabilir ve açıların eşliği daha sonra bir tanım olarak verilebilirdi. Biz gene de Hilbert'i izleyelim. Mutlaka bir bildiği vardır.

III.4. *ABC bir açı olsun. A, B ve C'nin doğrusal olmadıklarını varsayalım.* l, *bir* α *düzleminde bir doğru olsun. A′ ve B′,* l *üzerinde iki farklı nokta olsun.* π, α *düzleminde* l'*nin bir tarafı olsun. O zaman* π'*de öyle bir C′ noktası vardır ki, A′B′C′ ve ABC açıları eştirler. Ayrıca, eğer C″ bu özellikleri sağlayan bir başka noktaysa, A′C′ doğrusu A′C″ doğrusuna eşittir.*



Sırasız üç noktaya ***üçgen*** denir. Biz üçgenlerin üç noktasının birbirinden farklı olduklarını ve doğrusal olmadıklarını varsayacağız. Eğer noktalar *A*, *B* ve *C* ise {*A*, *B*, *C*} üçgeni *ABC* olarak yazılır. Tabii *ABC* üçgenini *BAC*, *BCA* vb gibi de yazabiliriz.

Yazıyı okuyan geometrici ve esaslı geometrici Mustafa Yağcı bu üçgen tanımı konusunda bana şöyle kükredi: "Yazınızda doğrusal olmayan (sırasız) üç noktaya üçgen denir demişsiniz. Açıkçası hiçbir yerde böyle bir tanıma rastlamadım. Bunda bir yanlışlık mı var yoksa anlamaya yetmiyor muyum, onu da anlamadım. Üçgenin tanımını bağıra bağıra öğrettiğim, beş kere tekrarlattığım, söyleyemeyeni derse almadığım öğrencilerimin bu yazıyı okuduklarını düşündüm bir an. Ne söylerim acaba?"

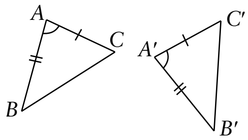
Doğrusu ben de yukardaki tanımı kafadan atmıştım! Hilbert nasıl yapmış diye bakmamıştım bile. Önemli olmadığından... Aşağı yukarı o da böyle yapmıştır, başka nasıl yapacak? Şimdi baktım. Hilbert bir üçgeni {*AB*, *BC*, *CA*} doğru parçaları kümesi olarak tanımlamış. Aşağıdaki beliti yazmadan önce de, bundan böyle bir üçgenin üç doğru parçasının doğrusal olmadığını varsayacağını söylemiş.

Hilbert bir üçgeni üç kenarıyla tanımlamış, bense üç tepe noktasıyla tanımladım. İki tanım arasında matematiksel olarak hiçbir ayrım yoktur.

Ama Mustafa Yağcı da haklı. Okullarda sadece matematik değil, matematikle birlikte bir de hayat bilgisi öğretilir. Üçgenin hayatta ne anlamda kullanıldığını öğrenciler bilmeli. Ama bizim matematik dışında bir kaygımız yok ki... Bizim için üçgenin kendisi ya da tanımı değil, üçgenin özellikleri önemli! Yeter ki üçgenle ilgili teoremleri kanıtlayabilelim, başka bir şey umurumuzda değil. Soyut matematiği insansoyunun diğer bütün uğraş alanlarından ayıran bu özellikten MD-2003-IV, sayfa 9-13'te sözetmiştik.

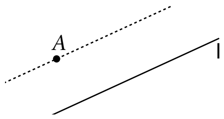
Ayrıca aşağıdaki beliti yazmak için illa bir üçgenden sözetmek gerekmez, üçgensiz de yazılabilir bu belit...

III.5. *Eğer ABC ve A′B′C′ üçgenleri için,* [*AB*] $\approx$ [*A′B′*], [*AC*] $\approx$ [*A′C′*] *ve* $\angle BAC \approx \angle B'A'C'$ *eşlikleri geçerliyse, o zaman* $\angle ABC \approx \angle A'B'C'$ *eşliği de geçerlidir.*



Şimdi meşhuuur ***parallellik belit***ini vereceğiz. Bu beliti Öklid'in diğer dört belitinden yola çıkarak kanıtlamak için heba edilen ana sütünün haddi hesabı yoktur.

IV.1. Paralellik Beliti. l *herhangi bir doğru ve* A, l*'de olmayan herhangi bir nokta olsun. O zaman* A *ve* l*'yi içeren düzlemde bulunan,* A*'dan geçen ve* l*'yle kesişmeyen en fazla bir doğru vardır.*

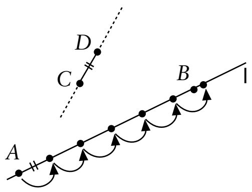


V. Süreklilik Belitleri

Bu bölümde vereceğimiz iki belit bir doğrunun gerçel sayılarla kodlanabileceğini söyleyecek.

Birinci belit gerçel sayıların şu özelliğini ifade edecek: $\varepsilon > 0$ ne kadar küçük bir sayı olursa olsun, eğer n doğal sayısı yeterince büyük alınırsa, $n\varepsilon$ sayısı her gerçel sayıyı geçer.

V.1. Arşimet Beliti. $[AB]$ *ve* $[CD]$ *herhangi iki doğru parçası olsun. O zaman öyle bir* k *doğal sayısı vardır ki,* $[CD]$*'ye eş* k *tane doğru parçası,* A*'dan başlanarak ardarda* AB *ışınında peşisıra sıralandığında,* B *noktası geçilir.*



Bir sonraki belitin neden gerekli olduğunu açıklamamız gerekiyor.

Yukardaki belitleri kullanarak, bir birim uzunluğunda bir doğru parçası verilmişse (uzunluğu tanımlamadık, ama hayal edin!) o zaman iki birim uzunluğunda bir doğru parçası inşa edebiliriz. Hatta $\sqrt{2}$ uzunluğunda bir doğru parçası da inşa edilebilir. Ama π, e, $2^{1/3}$ uzunluğunda doğru parçaları yukardaki belitlerle inşa edemeyiz.

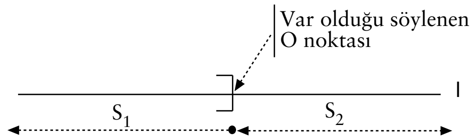
Bir sonraki belit de bu uzunlukta doğru parçaların inşa edilebileceğini söylemeyecek, ama en azından o beliti kullanarak bu uzunlukta doğru parçalarının olduğunu kanıtlayabileceğiz.

Sonuncu beliti Hilbert'in verdiği biçimde almayacağız, Hilbert'inki çok karmaşık. Hilbert'inkine eşdeğer olan bir başka belit öneriyoruz.

V.2. Doğrunun Tamlığı [Dedekind]. l *herhangi bir doğru olsun.* (l'yi l'nin noktaları kümesi olarak gördüğümüzü unutmayalım.) S_1 *ve* S_2 *kümeleri şu özellikleri sağlasın*:

1) $l = S_1 \cup S_2$.
2) $S_1 \cap S_2 = \varnothing$.
3) $S_1 \neq \varnothing$, $S_2 \neq \varnothing$,
4) $A, B \in S_1$ *ise* $[A, B] \subseteq S_1$,
5) $A, B \in S_2$ *ise* $[A, B] \subseteq S_2$.

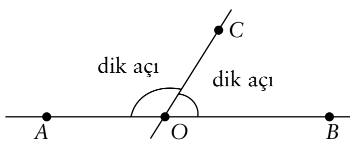
O zaman öyle bir $O \in l$ *noktası vardır ki, her* $A \in S_1$, $B \in S_2$, $A \neq O$, $B \neq O$ *için* O *noktası* A *ile* B *arasındadır.*



$2^{1/3}$ Var mı? Bu belit sayesinde $2^{1/3}$ uzunluğunun olduğu kanıtlanabilir. Kanıtlayalım...

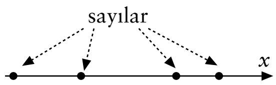
Kanıtlayalım ama daha sayının ne demek olduğunu bile bilmiyoruz... Tanımlayacağız. Her şeyi tanımlayacağız. Yazıyı daha fazla uzatmamak için ayrıntılara girmeyip okurun anlayışına sığınacağız.

Önce dik açıyı tanımlayalım. A-O-B ilişkisini sağlayan üç nokta alalım, yani O noktası A ve B noktalarının arasında olsun. C, AB doğrusu üstünde olmayan bir nokta olsun. Eğer AOC ve COB açıları eşse, bu açıların her birine ***dik açı*** denir.

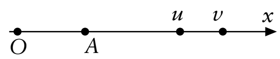


Görsel dikliğin matematiksel hiçbir anlamı olmadığından dik açıları özellikle "dik" çizmedik.

Şimdi "sayı"yı tanımlayalım. Herhangi bir x doğrusu alalım ve x'in noktalarına ***sayı*** diyelim. Yukardaki şekilde dört sayı gösterdik!



$O \in x$ herhangi bir nokta (yani sayı) olsun. Bu O noktasına ilerde **0 *sayısı*** diyeceğiz. $A \in x$, O'dan değişik bir nokta (yani sayı) olsun. Bu A noktasına ilerde **1 *sayısı*** diyeceğiz. İlerde yapacaklarımız açısından OA'yı bir ışın olarak görmekte yarar var.



Şimdi iki sayıyı (yani x'in iki noktasını) çarpmasını ve toplamasını öğreneceğiz. Aldığımız iki sayıya u ve v diyelim. Birazdan uv ve $u + v$ adını vereceğimiz iki sayı tanımlayacağız.

x'i O'da dik kesen bir y doğrusu alalım. Böyle bir y'nin varlığının kanıtını okura bırakıyoruz. Bu x ve y doğrularına halk arasında x ve y ***eksen***leri denir. Bu iki ekseni hep kullanacağız. Ayrıca y'de bir $B \neq O$ noktası seçerek y'de bir yön, yani bir OB ışını belirleyelim. Ayrıca, $OA \approx OB$ olsun.

Çarpma. u ve v noktalarının (sayılarının) OA ışını üzerinde, yani O'nun "pozitif" tarafında olduklarını varsayalım.

Aşağıdaki şekilden takip edin.

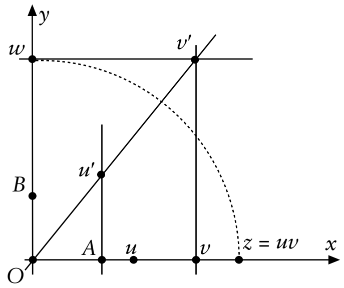
1) A'dan y eksenine bir paralel çizelim. (Bu doğru ilerde $x = 1$ doğrusu olacak.)

2) Bu dik üzerinde ve x'in B noktasının bulunduğu tarafta, $Ou \approx Au'$ eşliğini sağlayan bir u' noktası seçelim.

3) Ou' doğrusuyla v'den y'ye çekilen paralelin kesiştiği noktaya v' diyelim.

4) v' noktasından x'e bir paralel çekelim. Bu paralelin y'yi kestiği noktaya w diyelim.

5) OA ışını üstünde $Ow \approx Oz$ eşliğini sağlayan bir z noktası bulalım.



Bu z noktasına u ile v sayılarının ***çarpım***ı diyelim ve bu sayıyı uv olarak yazalım.

Elbette $uv = vu$, $(uv)w = u(vw)$, $uA = u$, $uO = O$ gibi eşitliklerin gösterilmesi gerekiyor, bunu okura bırakıyoruz.

Şimdi de toplamayı tanımlayalım.

Toplama. Gene u ve v noktalarının OA ışını üstünde olduklarını varsayacağız.

1) A'dan y'ye ve B'den x'e birer paralel çizelim.

2) Bu iki paralel C noktasında kesişsinler.

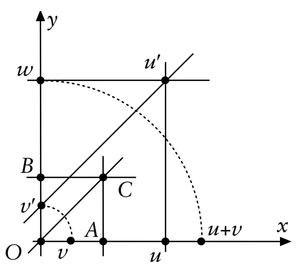
3) OB ışını üzerinde $Ov' = Ov$ eşliğini sağlayan bir v' noktası alalım.

4) v' noktasından OC doğrusuna bir paralel çekelim.

5) Bu paralel doğru u'dan y'ye çekilen paralelle u' noktasında kesişsin.

6) u' noktasından x'e bir paralel çekelim. Bu paralel y'yi w noktasında kessin.

7) OA ışını üzerinde $Ow \approx Oz$ eşliğini sağlayan bir z noktası alalım. Bu sayıyı $u + v$ biçiminde yazalım ve adına u ile v noktalarının ***toplam***ı diyelim.

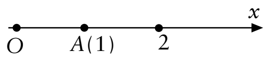


Eğer u ve v noktalarının her ikisi de OA ışını üzerinde değilse, uv ve $u+v$ sayıları benzer biçimde tanımlanırlar. Bu iki işlem, $u(v + w) = uv + uw$ gibi tahmin edilen tüm eşitlikleri sağlarlar.

Son olarak bir de iki sayı arasında eşitsizliği tanımlayalım. u ve v iki sayı olsun. Eğer OA ışını üzerinde $u + w = v$ eşitliğini sağlayan bir w sayısı varsa o zaman u'nun v'den ***küçükeşit*** olduğunu söyleyelim ve bunu $u \leq v$ olarak yazalım.

Bir de "***küp***ünü almak" fonksiyonunu tanımlayalım. Eğer z bir sayıysa, z^3, zzz olsun (z'nin kendisiyle üç kez çarpımı.)

Artık $2^{1/3}$ sayısının varlığını gösterebiliriz. V.2'yi kullanacağız. V.2'deki I doğrusunu x doğrusu olarak alalım. 2 sayısının nerede olduğu belli herhalde: A noktasına 1 dediğimizden, 2 noktası $A + A$ noktası olacak.



Şimdi,

$$S_1 = \{z \in x : z^3 \leq 2\}$$

olsun. $S_2 = x \setminus S_1$ olsun. S_1 ve S_2'nin V.2'deki koşulları sağladığı kanıtlanabilir. Dolayısıyla ikisinin "ortasında" bir sayı vardır. İşte bu sayı $2^{1/3}$ adını vereceğimiz sayıdır.

Son Söz. Öklid'in yapamadığı biçimselliği 2000 küsur yıl sonra Hilbert yapmıştır ve (üç boyutlu) geometrinin belitlerini vermiştir.

Boyutu illa üçe çıkmanın gereği yoktu, iki boyutlu düzlem geometrisinin de belitlerini verebilirdi, biz de verebilirdik.

Şimdi akla şu sorunun gelmesi lazım: Matematikte bu belitleri sağlayan bir sistem var mıdır?

Evet vardır! Bu, kümeler kuramından hareketle kanıtlanabilir. MD-2003-IV sayımızda kümeler kuramından hareketle doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi tanımlamıştık. Daha da ileri gidebilseydik, ki bir başka sayımızda gideceğiz, kümeler kuramından hareketle gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'yi tanımlayabilirdik. Ardından geometrinin noktalarını $\mathbb{R}^3$ kümesinin elemanları olarak tanımlayalım. Doğru, düzlem, arasındalık, eşlik, üstündelik gibi kavramları da tanımlayalım. Bu tanımlardan sonra elde edilen sistemin yukardaki aksiyomları sağladığını kanıtlamak oldukça kolaydır. İşte böyle... ♣