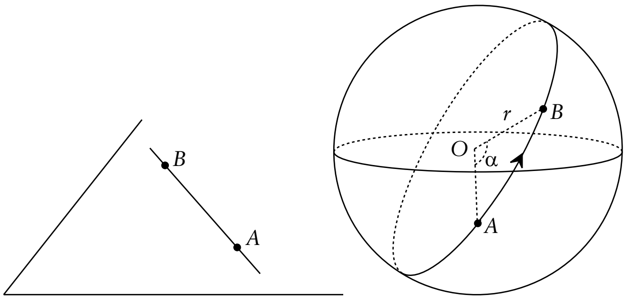
Küreselleşen Geometri

2. İstanbul - New York Uçuşu

Tosun Terzioğlu*
tosun@sabanciuniv.edu.tr

Geometride iki nokta arasındaki en kısa yolu veren eğriler ***jeodezik*** adı verilen eğriler sınıfına girer. Düzlemde veya R^3'te jeodezikler doğrulardır. Kürede ise jeodezikler "büyük çemberler"dir, yani merkezi kürenin merkezi olan çemberlerdir. Bunu geçen sayıdaki yazımızda kanıtlamıştık. Şimdi düzlemdeki jeodeziklerle kürenin jeodezikleri hakkında bildiklerimizi karşılaştıralım.



Düzlemin üstünde *A*'dan *B*'ye giden en kısa yol *A* ve *B*'den geçen doğru üstündedir. Kürenin üstünde *A*'dan *B*'ye giden en kısa yol, kürenin merkezi O ve *A* ve *B* noktalarından geçen çember üstündedir.

- Düzlemde iki jeodezik, yani iki doğru, ya bir noktada kesişir ya da hiç kesişmezler. Kürede ise iki jeodezik mutlaka iki noktada kesişir.
- Düzlemde iki noktadan tek bir doğru geçer. Kürede ise iki karşıt noktadan (kutuplar gibi) istediğimiz sayıda jeodezik geçer. (Ama kürede de karşıt olmayan noktalardan tek bir jeodezik geçer.)
- Düzlemde belirli bir noktadan hareket edip bir jeodezik üzerinde yürüyen karınca yönünü değiştirmedikçe bir daha o noktaya dönemez, durmadan yürür de yürür. Yani ömür biter, yol bitmez! Ama kürede herhangi bir jeodezik üzerinde yürüyen karıncamız bir tur sonra başladığı noktaya döner.

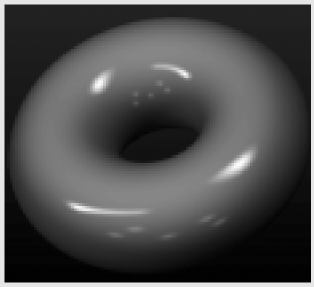
Mesafe. Düzlemde iki nokta arasındaki mesafeyi bulmak kolaydır. Eğer noktaların koordinatları (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) ise, bu iki nokta arasındaki mesafe, bilindiği üzere,

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

dir. Bu, Pisagor teoreminden kolaylıkla çıkar. Üç boyutlu Öklid uzayında da benzer bir formül vardır.

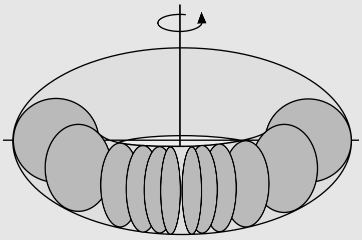
Jeodezik

Geçen yazımızda bir kürede en kısa yolun bir büyük çember üzerinde olduğunu kanıtlamak için akla karayı seçmiştik. Üstelik bunu tam olarak kanıtlayamamış, bazı varsayımlarda bulunmak zorunda kalmıştık.



Aynı soruyu bir "simit" üzerinde yanıtlamaya kalkarsanız bu tür soruların ne kadar zor olabileceğini kestirebilirsiniz.

"Simit"i, yandaki şekilde olduğu gibi, düzlemde y eksenine değmeyen bir çemberi y ekseni etrafında döndürerek elde edebiliriz. Elde edilen geometrik nesne matematikte ***torus*** olarak bilinir.



Bir ***jeodezik***, üstündeki birbirine "yeterince yakın" herhangi iki nokta arasında en kısa yolu veren bir eğridir, yani **yerel** olarak en kısa mesafeyi verir. Düzlemde ya da kürede olamaz ama, başka yüzeylerde her jeodezik, üstündeki herhangi iki nokta arasındaki en kısa eğri olmayabilir, yani jeodezik, **global** olarak en kısa mesafeyi veren eğri olmayabilir. Örneğin torus üstünde bu tür jeodezikler vardır (gergin bir iple torusu boydan boya sarın, ip hem küçük çemberi hem de y eksenini dolaşsın.)

Ya küre üzerindeki iki noktanın mesafesi nasıl hesaplanır? Kürenin yarıçapı r ise, A ve B arasındaki yolların en kestirmesi bu noktaları birleştiren büyük çember olduğundan, eğer AOB açısını α ile gösterirsek $(0 \leq \alpha \leq \pi)$ bu uzaklık $r\alpha$ olur. Demek ki mesafeyi hesaplamak için α açısını hesaplamalıyız.

* Sabancı Üniversitesi öğretim üyesi.

α açısını bulalım. Diyelim A ve B noktaları üç koordinatıyla verilmiş:

$$A = (x_1, y_1, z_1) \text{ ve } B = (x_2, y_2, z_2).$$

Vektörlerin iç çarpımlarını hatırlayalım: OA ve OB vektörlerinin iç çarpımı

$$(OA, OB) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

olarak tanımlanır. Eğer OA ve OB arasındaki açı α ise, bilindiği ve kanıtı kolay olduğu üzere,

$$(OA, OB) = |OA|\,|OB| \cos \alpha$$

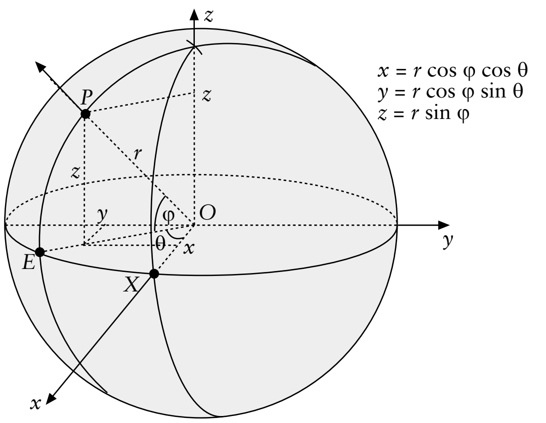
eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla eğer A ve B kürenin iki noktaysıysa $(OA, OB) = r^2 \cos \alpha$ olur. Buradan,

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r^2}$$

elde ederiz ve bundan da α bulunur.

Noktalar enlem ve boylam koordinat sistemlerinde de verilmiş olabilirler. Geçen yazımızda bu koordinat sistemini tanımlamıştık, bir kez daha tekrar edelim. Küre üstünde bir $P(x, y, z)$ noktası verilmişse ve φ ve θ açıları aşağıdaki şekildeki gibiyse, o zaman bu iki açı r yarıçaplı küre üzerinde bulunan P noktasını belirlerler ve x, y, z koordinatlarıyla aralarında şu ilişkiler vardır:

$$x = r \cos \varphi \cos \theta$$
$$y = r \cos \varphi \sin \theta \qquad (1)$$
$$z = r \sin \varphi$$



Bizim durumumuzda, A ve B noktalarının açıları sırasıyla φ_1, θ_1 ve φ_2, θ_2 ise,

$$\begin{aligned} r^2 \cos \alpha &= (OA, OB) \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\ &= r^2(\cos \theta_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_2 \cos \varphi_2 \\ &\quad + \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_2 \sin \theta_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \end{aligned}$$

eşitliğini buluruz. r^2'leri sadeleştirerek ve trigonometrik özdeşliklerle sadeleştirme yaparak,

$$\cos \alpha = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

formülüne ulaşırız. Buradaki açıların radyan cinsinden yazıldığını da unutmayalım (π radyan = 180°).

İstanbul - New York Mesafesi. Yukarda bulduklarımızı kullanarak İstanbul - New York arasındaki en kısa mesafeyi hesaplayalım.

İstanbul'un enlemi 41° kuzey ve boylamı da 29° doğu. Bunlar yaklaşık sayılar tabii, derecenin altmışta biri olan dakikalarını gözönüne almadık. Aynı şekilde New York da 41° kuzey enleminde ve boylamı da 73° batı. Yani iki şehir aynı enlemde bulunuyorlar. Aralarındaki en kısa yol 41° kuzey enlemi boyunca gidilen yol değildir, yukarda da dediğimiz gibi, büyük çember yoludur.

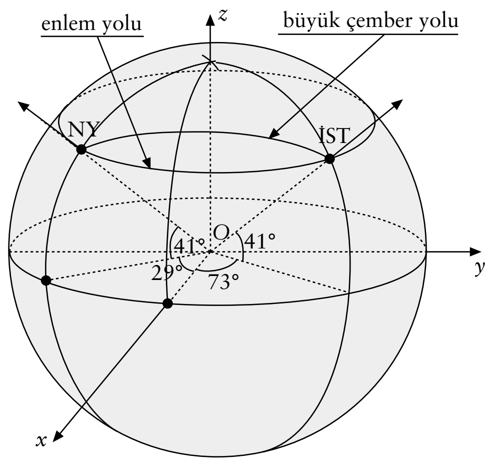
Yukarda bulduklarımızdan, bu iki şehir arasındaki açının

$$\cos \alpha = \cos^2(41\pi/180)\cos(102\pi/180) + \sin^2(41\pi/180)$$

formülüyle bulunduğu anlaşılır. Hesap makinası ya da trigonometri cetveli yardımıyla hesaplarsak $\alpha \approx 1{,}2535$ radyan $\approx 71{,}82°$ buluruz. r de yeryüzünün yarıçapı, yaklaşık 6378 km. Demek ki uzaklık

$$r\alpha = 6378 \times 1{,}2535 = 7994{,}8 \text{ km}$$

olacaktır. (Bütün bunlar yaklaşık hesaplar elbet. Tam mesafeden ne kadar şaştığımızı bulmak nümerik analizin oldukça basit bir konusudur. Mesafeyi 8000 km olarak kabul edebiliriz.)



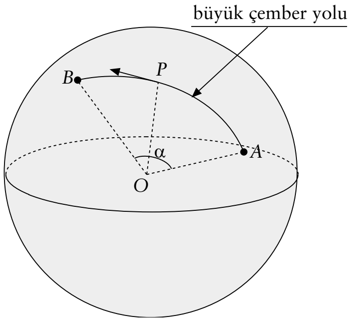
Uçağımız İstanbul'dan kalkıp New York'a doğru, büyük çember rotası yerine iki şehrin aynı enlemde olduğunu düşünerek hep tam batı yönüne uçarak yol alsaydı acaba bu yolculuk kaç kilometre olurdu? Bu sorunun yanıtı kolay. Bizim enlemimizde enlem çemberinin yarıçapı

$$6378 \cos(41\pi/180) \text{ km}.$$

Bunu $102\pi/180$ radyanla çarparsak yaklaşık 8600 kilometre uçmamız gerekeceğini görürüz. Büyük çember yolundan 600 km, yani yüzde 7,5 daha fazla, az buz değil.

Büyük Çember Rotası. Pilot için enlem çemberi boyunca uçmak kolay. Tek yapacağı iş uçağın burnunu hep batı yönünde tutmak. Bunun için iyi bir pusula yeterli.

Bir de uçağın en kestirme yol olan büyük çember boyunca gitmesi için pilotun izlemesi gereken rotayı inceleyelim. Bu sefer, pilotun izlemek istediği büyük çember ekvator ya da boylamlardan biri değilse, yönü hiçbir zaman sabit olamaz, sürekli değişmeli.

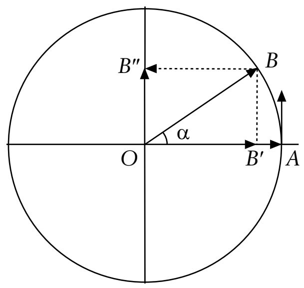


Yön belirlemek için illa dünya ölçeğinde bir küre almamıza gerek yok. Boyutları küçülterek birim yarıçaplı standart küre üzerinde çalışabiliriz.

Standard küre üzerinde karşıt olmayan A ve B noktaları ve bu noktalardan geçen bir büyük çember parçası alalım. Bu paragrafta AB büyük çember yolunu tutturmak için pilotun izlemesi gereken rotayı belirleyeceğiz. α, her zaman olduğu gibi AOB açısı olacak. Elbette $0 \leq \alpha < \pi$.

AB büyük çember yayı üzerinde herhangi bir P noktası alacağız ve bu noktadan büyük çembere teğet vektörü bulacağız. Bu teğet vektörün yönü, P noktasına vardığında pilotun izlemesi gereken rotayı belirler. Elbette P yerine A'yı almanın herhangi bir sakıncası yoktur, bulduğumuz yanıtta α'yı değiştiririz daha sonra.

Daha kolay resmini yapabilmek için uzayda yer değiştirerek AB büyük yayını yandaki şekildeki gibi profilden görelim. Pilotun A'dan B'ye gitmek için izleyeceği rota, şekilde görüldüğü gibi çembere A'da değen teğetin yönü tarafından verilmiştir. Bu teğeti bulacağız.



Yukardaki şekilden takip edelim. Bulmak istediğimiz teğet, OB'' vektörüne paralel. Demek ki OB'' vektörünü bulmalıyız. Kolay:

$OB'' = OB + BB'' = OB - OB' = OB - \cos\alpha\ OA$.

Teğetin yönünü veren bir vektör bulduk: $OB - \cos\alpha\ OA$ vektörü. Bu vektörün uzunluğunu bulalım şimdi. Bunun için kendisiyle iç çarpımını alalım:

$$(OB - \cos\alpha\ OA,\ OB - \cos\alpha\ OA)$$
$$= (OB, OB) - 2\cos\alpha\,(OA, OB) + \cos^2\alpha\,(OA, OA)$$
$$= 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$(OB - \cos\alpha\ OA)/\sin\alpha$$

vektörünün, yani

$$\csc\alpha\ OB - \cot\alpha\ OA$$

vektörünün uzunluğu 1'e eşittir. Bu vektöre bir ad verelim, v_{AB} diyelim:

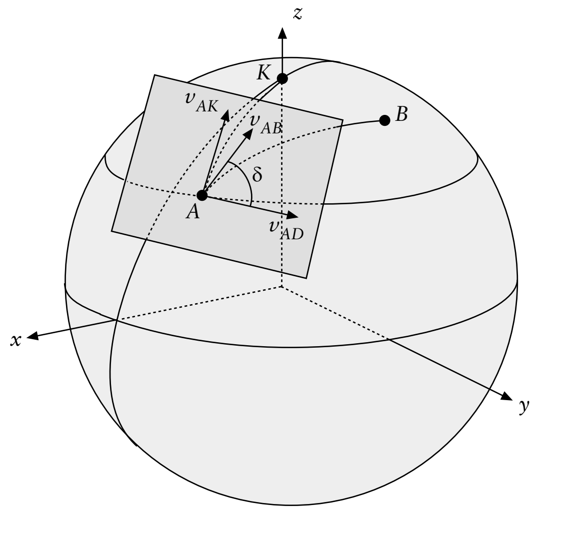
$$v_{AB} = \csc\alpha\ OB - \cot\alpha\ OA. \quad (3)$$

Birim uzunluğundaki v_{AB} vektörü, büyük çember üzerinden A noktasında B noktasına doğru giderken A'daki yönümüzü belirler.

Eğer v_{AB} vektörünün üç koordinatını belirlemek istiyorsak, OA ve OB yerine bu vektörlerin koordinatlarını yazmalıyız elbet:

$$OA = (\cos\varphi_1 \cos\theta_1,\ \cos\varphi_1 \sin\theta_1,\ \sin\varphi_1),$$
$$OB = (\cos\varphi_2 \cos\theta_2,\ \cos\varphi_2 \sin\theta_2,\ \sin\varphi_2).$$

İyi güzel de, pusuladan başka bir aygıtı olmayan pilot (ya da kaptan) yönünü nasıl tayin edecek? Bunun için biraz daha hesap yapmamız gerekiyor.



Önce ne bulmak istediğimizi matematik dilinde ifade edelim: Küreye teğet bir vektörün (v_{AB} vektörünün) hangi yönü gösterdiğini bulacağız. Yandaki şekildeki δ açısına göre pilot yönünü belirlemeli. $\delta = 90$ ise pusulasına bakıp kuzeye gider, eğer $\delta = 0$ ise doğuya gider. Eğer δ başka bir değerse doğudan o kadar sapar. Dolayısıyla δ açısını hesaplamalıyız.

Hesaplara girmeden önce yukardaki şekli inceleyelim.

Şekilde, K kuzey kutbunu, yani (0, 0, 1) noktasını simgeliyor. v_{AK} ise, aynen v_{AB} gibi, A ile K

arasındaki jeodeziğe, yani A'dan geçen boylama teğet olan birim vektör.

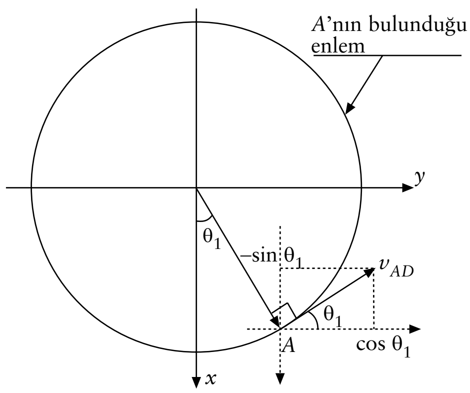
Eğer doğu kutbu olsaydı D doğu kutbunu simgeleyecekti, ama yok! v_{AD}, A'dan geçen enleme teğet olan ve doğuyu gösteren birim vektör.

v_{AD} ve v_{AK} vektörleri birbirine dikler elbette. Ayrıca, v_{AB}, v_{AD} ve v_{AK} vektörleri, her biri küreye teğet olduğundan, küreye A'da teğet olan düzlem üzerindedirler. OA vektörü bu teğet düzleme dik olduğundan, OA vektörü v_{AB}, v_{AD} ve v_{AK} vektörlerinin her birine diktir.

Şimdi δ'yı hesaplayalım. v_{AB} ve v_{AD} birim vektörler olduğundan,

$$(v_{AD}, v_{AB}) = \cos \delta.$$

v_{AB}'yi (3)'te bulmuştuk. v_{AD} vektörünü bulup yerine koyalım.



Küremize tepeden bakalım ve A'nın üstünde bulunduğu enlemde gördüğümüzü çizelim (yukardaki şekil). Şekilden hemen v_{AD}'yi buluruz:

$$v_{AD} = (-\sin \theta_1, \cos \theta_1, 0).$$

Şimdi artık δ'yı hesaplayabiliriz. v_{AD}, OA'ya dik olduğundan,

$$\begin{aligned}\cos \delta &= (v_{AD}, v_{AB}) \\ &= (v_{AD}, \csc \alpha\, OB - \cot \alpha\, OA) \\ &= \csc \alpha\, (v_{AD}, OB) \\ &= \csc \alpha\, ((-\sin \theta_1, \cos \theta_1, 0), (\cos \varphi_2 \cos \theta_2, \cos \varphi_2 \sin \theta_2, \sin \varphi_2)) \\ &= \csc \alpha\, (-\sin \theta_1 \cos \varphi_2 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \varphi_2 \sin \theta_2) \\ &= \csc \alpha \cos \varphi_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)\end{aligned}$$

elde ederiz. Yani,

$$\cos \delta = \csc \alpha \cos \varphi_2 \sin(\theta_2 - \theta_1).$$

Bu formülde α açısının,

$$\cos \alpha = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

formülüyle bulunduğunu da anımsatalım.

Uçağın A'daki rotasının açısının kosinüsünü bulduk. Burdan α bulunur. Örneğin, İstanbul'la New York arasındaki jeodeziğin İstanbul ayağında δ aşağı yukarı 141°'dir; bu, yukarda bulduklarımızdan kolay bir hesapla çıkar. Pusulada yönler 0'dan 359°'ye kadar gösterilir. Kuzey 0, doğu 90, güney 180 ve batı da 270°'dir. Dolayısıyla İstanbul'dan kalkan uçağımızın rotası pusulada 270 + 180 – 141 = 309° olmalıdır.

Eğer t anında uçağın açıları φ_t ve θ_t ise, pilot o anda, uçağı, δ_t açısı,

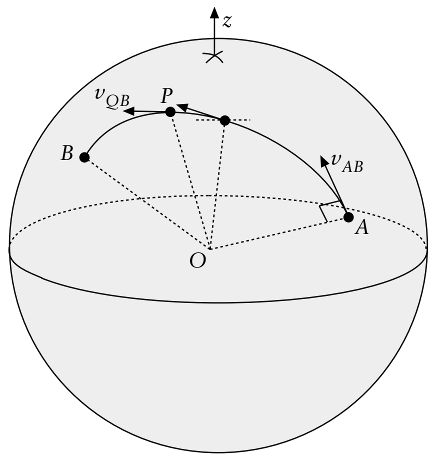
$$\cos \delta_t = \csc \alpha_t \cos \varphi_2 \sin(\theta_2 - \theta_t)$$

eşitliğini sağlayacak biçimde yönlendirmesi gerekir. Buradaki α_t açısı da,

$$\cos \alpha_t = \cos \varphi_t \cos \varphi_2 \cos(\theta_t - \theta_2) + \sin \varphi_t \sin \varphi_2$$

eşitliğini sağlayan açıdır.

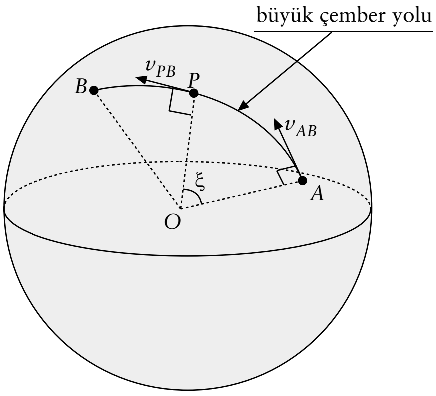
Kutba En Yakın Nokta. İstanbul'dan New York'a jeodezik üzerinde giden uçağın kutba en yakın olduğu noktayı hiç merak ettiniz mi? Sanmam! Ama biz gene de bulalım o noktayı. Maksat matematik olsun!



A'dan B'ye yukardaki güzergâhı izleyerek giden uçağımız, P noktasına kadar kuzey kutbuna yaklaşıyor, P noktasından sonra kuzey kutbundan uzaklaşıyor. P noktası ise, uçağın kutba en yaklaştığı nokta.

Kutba en yakın olduğu noktada, uçağın yörüngesi ya tam doğuya ya da tam batıya yöneliktir, yani eğer v_{PB} vektörünün üçüncü koordinatı 0'sa, o zaman uçak P noktasında artık kuzey kutbuna yaklaşmıyordur, yörüngesi ekvatora paralel duruma gelmiştir ve bir an sonra kuzey kutbundan uzaklaşmaya başlayacaktır. Dolayısıyla yapmamız gereken şey, uçağın AB yolu üzerinde verilmiş herhangi bir P noktası için, v_{PB} vektörünün üçüncü koordinatını hesaplayıp, bu koordinatın ne zaman 0'a eşit olduğunu bulmak. Böylece P noktasını bulduktan sonra, kutba ne kadar yaklaşacağımızı anlarız.

P, A'dan B'ye giden büyük çember rotası üzerindeki herhangi bir nokta olsun. OP'yle OA arasındaki açı da ξ olsun. $0 \le \xi \le \alpha$ elbette.



OA, OB, OP ve v_{AB} vektörleri hep aynı düzlemdeler. Ayrıca OA ve v_{AB} birim vektörleri birbirlerine dik. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} OP &= (OP, OA)OA + (OP, v_{AB})v_{AB} \\ &= \cos\xi\, OA + \sin\xi\, v_{AB}. \end{aligned}$$

Ama P noktasında B yönünü gösteren v_{PB} vektörü de Δ düzleminde ve yukarda koordinatlarını bulduğumuz OP'ye dik, dolayısıyla,

$$v_{PB} = -\sin\xi\, OA + \cos\xi\, v_{AB}.$$

v_{AB} yerine (3)'teki ifadesini kullanarak

$$v_{PB} = (-\sin\xi - \cos\xi \cot\alpha)OA + \cos\xi \csc\alpha\, OB$$

formülüne varırız. Bu formülden yararlanarak, OA ve OB vektörlerinin üçüncü koordinatları $\sin\varphi_1$ ve $\sin\varphi_2$ olduğunu bildiğimizden, v_{PB}'nin üçüncü koordinatını bulabiliriz:

$$(-\sin\xi - \cos\xi \cot\alpha)\sin\varphi_1 + \cos\xi \csc\alpha \sin\varphi_2.$$

Büyük çember üzerinde bu koordinat sıfıra eşit olduğu zaman rotamız kutba en yakın noktada olacak. Yani o sırada tam doğu–batı yönünde (enleme teğet) uçuyor olacağız. Yukarıdaki ifadeyi sıfıra eşitlersek

$$\tan\xi = \csc\alpha \sin\varphi_2 / \sin\varphi_1 - \cot\alpha \qquad (4)$$

elde ederiz. Böylece ξ açısını bulmuş olduk. Şimdi bu noktadaki enlemi bulalım.

Eğer bu noktada enlem λ ise, OP vektörünün üçüncü koordinatı $\sin\lambda$'dir. Dolayısıyla OP'yi (daha doğrusu OP'nin üçüncü koordinatını) bulmalıyız. Bunun için, biraz önce bulduğumuz $OP = \cos\xi\, OA + \sin\xi\, v_{AB}$ eşitliğini ve (3)'ü kullanacağız:

$$\begin{aligned} OP &= \cos\xi\, OA + \sin\xi\, v_{AB} \\ &= \cos\xi\, OA + \sin\xi\,(\csc\alpha\, OB - \cot\alpha\, OA) \\ &= (\cos\xi - \sin\xi \cot\alpha)OA + \sin\xi \csc\alpha\, OB. \end{aligned}$$

OA ve OB'nin üçüncü koordinatlarını biliyoruz: $\sin\varphi_1$ ve $\sin\varphi_2$. Demek ki,

$$\sin\lambda = \sin\varphi_1(\cos\xi - \sin\xi\cot\alpha) + \sin\varphi_2 \sin\xi \csc\alpha.$$

Istanbul - New York arasında $\varphi_1 = \varphi_2$ olduğundan, özel olarak $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ haline bakalım. (4)'ten $\tan\xi = \csc\alpha - \cot\alpha$ çıkar. Bunu kullanarak,

$$\begin{aligned} \sin\lambda &= \sin\varphi_1(\cos\xi - \sin\xi\cot\alpha) + \sin\varphi_2 \sin\xi\csc\alpha \\ &= \sin\varphi(\cos\xi - \sin\xi\cot\alpha + \sin\xi\csc\alpha) \\ &= \sin\varphi(\cos\xi + \sin\xi\,(\csc\alpha - \cot\alpha)) \\ &= \sin\varphi(\cos\xi + \sin\xi\tan\xi) \\ &= \sin\varphi / \cos\xi = \sin\varphi \sec\xi \end{aligned}$$

buluruz. (Buradaki ξ değeri yukardaki $\tan\xi = \csc\alpha - \cot\alpha$ formülünden bulunur).

İstanbul–New York uçuşunda bu değer (sizin de hesap makinasıyla hesaplayabileceğiniz gibi) 54°'den biraz fazladır, yaklaşık olarak 54° kuzey 22° batı. Bu nokta Atlantik Okyanusu'nda bir yerde; kuzey kutbuna olan uzaklığı 4007 km. Bir fikir vermesi için Hamburg şehrinin enleminin yaklaşık 53° kuzey olduğunu ve İstanbul'un kutba uzaklığının yaklaşık 5455 km olduğunu belirtelim.

En optimal rota büyük çember üzerindedir ama aslında uçaklar bu rotayı takip etmekte hiç serbest değil. Uluslararası hava koridorlarını kullanarak İstanbul-New York arasında uçmak zorundalar. Büyük çember rotası en kestirme yol, ancak özellikle denizde bu rota bazı tehlikeleri de beraberinde getirir. Titanik transatlantiğinin bu rotayı takip ederken buzdağına çarptığını hatırlayalım! ♣

Kaynakça

[1] Dava Sobel ve William J.H. Andrewes, **Boylam**, Çev. M. Göktepeli, TÜBİTAK Popüler Yayınları, 2004.

[2] Roger Fenn, **Geometry**, Springer 2001.

[3] George A. Jennings, **Modern Geometry with Applications**, Springer 1994.