

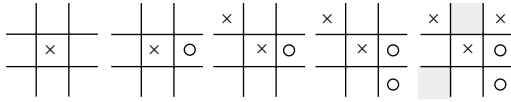
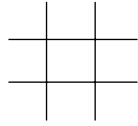


Kapak Konusu: Geometrik Kombinatorik

# Sonlu Düzlemlerde Üç Taş Oyunu

Oya Farfara

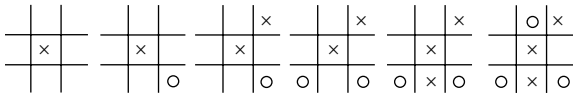
Üç taş oyununu bilme-  
yen yoktur herhalde. Hani yere, tah-  
taya ya da kâğıda aşağıdaki şeklin çizildiği, sonra  
iki oyuncunun sırayla boş haznelere x  
ya da o işaretleriyle sahiplendiği, ay-  
nı sıraya, sütuna ya da iki köşegen-  
den birine sahiplenenin oyunu ka-  
zandığı oyun. Hamlesi x olan oyun-  
cuya İksan (Nam-ı diğer Xan!), diğerine de Oya di-  
yelim. İksan hep birinci oyuncu olsun, adaşım Oya  
da ikinci oyuncu. İşte bir üç taş oyunu:



İki ayrı yere (gri haznelere) oynayarak kazanacağından,  
bu oyunu İksan kazanır.

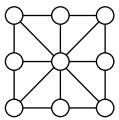
Eğer üç taş oyununu yeterince oynamışsanız, iyi  
oyduğunda bu oyunun berabere bitmesi gerektiği-  
ni de biliyorsunuz demektir. Nitekim yukardaki  
oyunu Oya kötü oynadığından kaybetti, daha iyi  
oynasaydı kaybetmeyebilirdi. Oya'nın ilk hamlesi  
kötü, o ilk hamleden sonra kaybetmek zorunda.

Oya'nın İksan'ın yukardaki "orta nokta"  
hamlesine karşı yapabileceği özünde değişik iki  
hamle var. Ya yukardaki gibi İksan'ın yanına oy-  
nayacak ya da aşağıdaki gibi çaprazına. Eğer Oya  
ilk hamlesinde İksan'ın çaprazına oynarsa oyunun  
berabere bitmesini sağlayabilir.



Bu oyun berabere biter

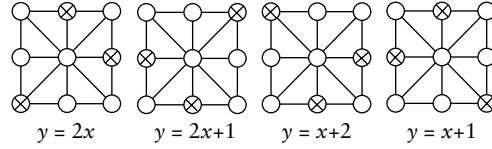
Aynı oyunu aşağıdaki gibi dokuz nokta üzerin-  
de oynayalım. Her oyuncu sırası geldiğinde nokta-  
ları siyaha ya da griye boyasın. Gene  
bir doğruya sahiplenene oyuncu oyunu  
kazansın.



Bu dokuz noktalı geometride 8 tane  
doğru var: Üçü yatay, üçü dikey, ikisi de çapraz.

Üç taş oyunu ile hiçbir farkı olmadığından bu  
oyun berabere biter. Oyuncular iyi oynarlarsa el-  
bet... Biri şaşırırsa diğeri oyunu kazanabilir.

Şimdi doğru sayısını artıralım. Dört yeni doğ-  
ru daha ekleyelim (doğrunun noktaları çarpı işare-  
tiyle belirlenmiş):



Böylece  $8 + 4 = 12$  doğrumuz oldu. Yeni oyunumu-  
zu 12 doğrudan birine ilk sahiplenene oyuncu ka-  
zansın.

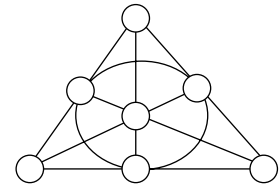
**Soru:** Bu oyunu iki oyuncudan biri mutlaka  
kazanır mı? Yoksa oyun (her iki taraf da iyi oynar-  
sa) berabere mi biter?

Klasik üç taş oyununda ortadaki noktanın di-  
ğer noktalara göre bir üstünlüğü vardır, çünkü o  
noktadan en fazla sayıda doğru geçer (tam dört ta-  
ne), dolayısıyla ilk hamlenin ortadaki nokta olma-  
sında yarar vardır. Oysa 12 doğrulu yeni oyunumu-  
zda tüm noktalar eşdeğerdir, hiçbir noktanın  
bir başka noktaya göre üstünlüğü yoktur.

**Soru:** Bunu kanıtlayabilir misiniz? Her noktadan  
aynı sayıda doğrunun geçmesi yetmez. Noktaları  
noktalara götüren ama doğrusal noktaları doğrusal  
noktalara götüren bir eşleşme bulmalısınız.

Yukarıda verilen geometride 9 nokta ve 12 doğ-  
ru var. Ayrıca her doğrunun üstünde 3 nokta var ve  
her noktadan 4 doğru geçiyor. Bu, bir önceki yazıda  
(sayfa 43'te) verilen 3 dereceli afin düzlemdir.

Buna benzer bir oyunu nokta ve doğrulardan  
oluşan herhangi bir düzlemde oynayabiliriz, örneğin  
aşağıdaki düzlemde. Bu düzlemde 7 doğru ve 7 nok-  
ta var. Doğrulardan altısı açık açık gözüküyor, bun-  
lar bizim bildiğimiz "nor-  
mal" doğrulara benziyor-  
lar. Bir de ortadaki (söyle-  
mesi kulağa hoş gelen) yu-  
varlak doğru var. Bu düz-

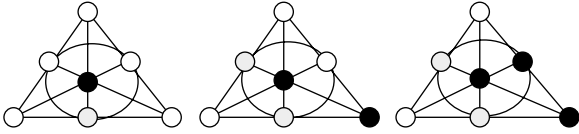


lemde her doğru da 3 nokta var ve her noktadan üç doğru geçiyor. Burada da her nokta her noktaya eşdeğerdir, hiçbir noktanın bir diğer noktaya göre üstünlüğü yoktur.

Bu son oyunu birinci oyuncu kazanır. Birinci oyuncunun ilk hamlesini herhangi bir nokta olabilir, tüm noktalar eşdeğer olduğundan ilk hamlenin ne olduğunun hiçbir önemi yok. İnanması belki biraz daha zor ama ikinci oyuncunun da her hamlesi eşdeğerdir. Nereye oynarsa oynasın oyunun akıbeti bir hamleden bir başka hamleye değişmez.

**Soru:** Okur bunu kanıtlayabilir mi? Herhangi iki noktayı herhangi iki noktaya götüren ve doğruları doğrulara götüren bir dönüşüm bulmak gerekiyor.

Bu oyun aşağıdaki gibi seyretmelidir. Siyahların üçüncü hamlesi iki değişik noktadan kazandırdığından, grilerin bu hamleye karşı savunması yok.



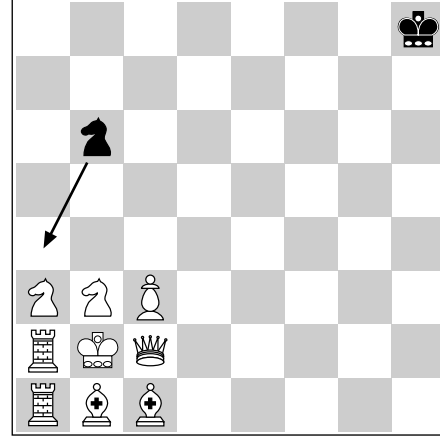
Bu oyunlar *tüm bilgilerin ortada olduğu oyun*lardır. Çünkü oyunda *tüm* bilgiler *tüm* oyunculara açıktır. Birinin bildiğini diğeri de bilir. Ayrıca zar gibi, yazı-tura gibi, çekilecek kâğıt gibi şansa yer yoktur. Dahası bu oyunlar *sonlu oyun*lardır. Yani her hamlede her oyuncunun yapabileceği sonlu sayıda hamle vardır ve oyun en fazla belli bir hamle sonra (en fazla geometrinin nokta sayısı kadar hamle sonra) biter.

Yukardaki özellikleri sağlayan oyunlarda ya birinci oyuncunun *kazanan bir stratejisi* vardır (yani ikinci oyuncu ne oynarsa oynasın, birinci oyuncu oyunu kazanacağı hamleleri bulabilir) ya da ikinci oyuncunun en azından beraberliği garantileyen, hatta oyununa göre belki de kazandırtan bir stratejisi vardır (yani birinci oyuncu ne oynarsa oynasın, ikinci oyuncu yenilmeyeceği hamleleri bulabilir.) Bu teoremi MD-2003-III, sayfa 71'de kanıtlamıştık.

Örneğin satranç yukardaki özellikleri sağlayan bir oyundur. Ama satranç çok uzun ve hamle sayısı çok olan bir oyun olduğundan, beyazları kazandırtan ya da siyahlara en azından beraberliği garantileyen strateji bugüne dek bulunamamıştır ve bu sayede bugün hâlâ satranç turnuvaları düzenlenir.

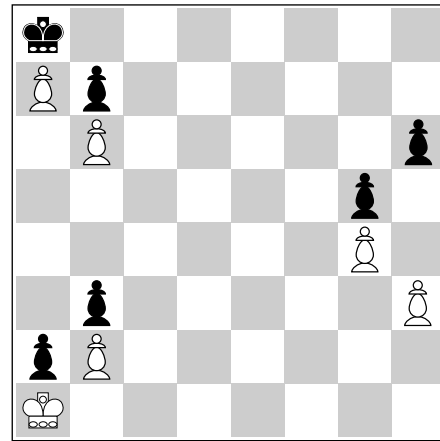
Yalnız satrançla bu yazının konusu olan oyunlar arasında önemli bir ayrım var. Satrançta bir

oyuncunun taşları oyuncuya ayakbağı olabilirler. Örneğin, aşağıdaki pozisyonda siyahlar bir hamlede beyazları mat edebilirler, çünkü beyazların çok taşı var! (Sıra beyazlarda olsa, onların da bir hamlede matı var.)



Siyah at a4 hamlesiyle mat eder.

Ayrıca satrançta hamle yapmak her zaman iyi değildir. Örneğin aşağıdaki pozisyonda hamle sırası beyazlarda olması beyazlar için dezavantaj; beyazlar pas geçebilse oyunu kazanacaklar ama pas geçemiyorlar ve bu yüzden oyunu kaybediyorlar. Aynı şey siyahlar için de geçerli; yani bu pozisyonda oynayan kaybediyor.



Oynayan kaybeder

Bizim oyunumuzdaysa hamle yapmak hiçbir zaman dezavantaj olamaz. Nokta fazlalığı da dezavantaj olamaz. Ne kadar çok nokta bizim olursa o kadar iyi. İşte bu yüzden bu oyunda ancak birinci oyuncunun kazanan bir stratejisi olabilir, ikinci oyuncu olsa olsa berabere kalabilir. Bunu kanıtlayalım.

**Ancak Birinci Oyuncunun Kazanan Bir Stratejisi Olabilir.** Diyelim ikinci oyuncunun kazanan bir stratejisi var. Birinci oyuncuyu kazandıran bir strateji bularak çelişki elde edeceğiz. Birinci oyuncu ilk hamlesinde herhangi bir noktaya sahiplensin. Sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncu kazanacağını sandığı stratejisini uygulasin, birazdan avcunu yalayaçağını anlayacak. Şimdi sıra gene birinci oyuncuda. Birinci oyuncu, ilk hamlesini yapılmamış varsayarak sanki ikinci oyuncuymuş gibi oyunu oynasin ve ikinci oyuncunun kazanan stratejisini uygulasin. Buna “ilk hamleyi görmemiş olayım” stratejisi diyebiliriz. Birinci oyuncu ikinci oyuncunun stratejisini uygulamada tek bir sorun yaşayabilir: O anda stratejisini uygulayabilmek için yapması gereken hamleyi daha önce yapmıştır... Ama birinci oyuncu o anda yapması gereken o hamleyi daha önce yapmışsa daha iyi, bunun bir mahsuru olamaz ki... Madem ki o hamleyi daha önce yapmış, artık o hamleyi yapmasına gerek yoktur, başka bir noktaya sahiplensin, canı hangi noktayı çekiyorsa o noktayı boyasin, fazla nokta göz çıkarmaz. Böylece birinci oyuncu ikinci oyuncunun stratejisini uygulayabildiği gibi, ikinci oyuncunun aynı stratejiyi uygulayarak sahip olabileceği nokta sayısından bir fazlasına sahip olur. Böylece oyunu birinci oyuncu kazanır. Çelişki... Demek ki ikinci oyuncunun kazanan stratejisi olamaz. En fazla berabere kalabilir.

**Oyun Sahalarımız.** Yazımızda ele alacağımız oyun sahalarını açıklayalım. İki tür oyun sahamız olacak: afin ve izdüşümsel düzlemler.

**Afin Düzlemler.**  $p$ , bir asal sayı ve

$$F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, p-1\}$$

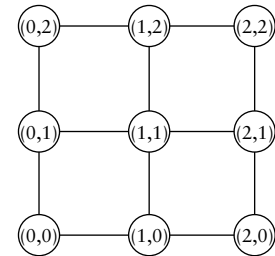
olsun. Toplama, çarpma, çıkarma gibi bilimum işlemleri modülo  $p$  yapalım. Noktalarımız  $x, y \in F_p$  için  $(x, y)$  elemanları olsun. Yani noktalar kümesi,

$$F_p^2 = F_p \times F_p = \{(x, y) : x, y \in F_p\}$$

olsun. Örneğin,  $p = 3$  ise, noktalarımız yandaki şekilde gibidir.

Böylece toplam  $p^2$  tane nokta elde ederiz. Şimdi de doğruları belirtelim. Doğrularımız, hem  $u$ 'nun hem de  $v$ 'nin aynı anda 0 olmadığı  $u, v, w \in F_p$  için,

$$ux + vy + w = 0$$



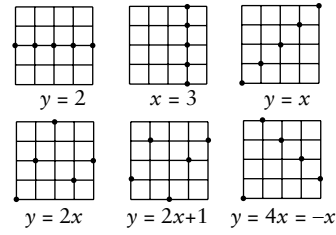
denklemini sağlayan  $(x, y)$  noktaları olsun. Denklemi  $u$ 'ya ya da  $v$ 'ye bölerek (çünkü  $p$  asal olduğunda,  $F_p$  halkasında 0 olmayan elemanları tersi-nirdirler, bkz. MD-2004-I, sayfa 16, Sonuç 5) doğruları iki değişik biçimde gösterebiliriz:

$$y = mx + b$$

ve

$$x = a$$

biçiminde yazılan doğrular. İkinci tip doğrular dikey doğrulardır. Eğer birinci tip doğruda  $m = 0$  alırsak,  $y = b$  yatay doğrularını buluruz. Aşağıda  $p = 5$  için birkaç doğru örneği görüyorsunuz.



Bu düzleme  $A(p)$  adını verelim.  $A(p)$  bir afin düzlemdir (bkz. sayfa 42.)

Yukarda yapılanlar,  $F_p$  halkası yerine sonlu herhangi bir  $F$  cismi için yapılsaydı da bir afin düzlem elde edilirdi.

**İzdüşümsel Düzlemler.** Sayfa 44'te bir afin düzlemden bir izdüşümsel düzlemin nasıl elde edileceğini gördük, her paralel sınıfı için “sonsuz” bir nokta ekledik, bunun dışında bir de “sonsuz” bu “sonsuzdaki” noktaları içeren bir doğru ekledik. Dolayısıyla yukarda tanımlanan her afin düzlem sayfa 44'te açıklanan yöntemle izdüşümsel bir geometri verir. Bu bölümde “aynı” izdüşümsel düzlemleri daha geometrik yöntemle inşa edeceğiz.

$p$ , gene bir asal sayı ve

$$F_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$$

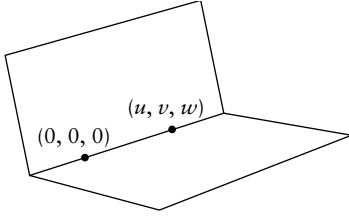
olsun. Üç boyutlu  $F_p^3$  uzayını ele alalım.  $a, b$  ve  $c$ 'nin üçünün de 0 olmadığı  $a, b, c, d \in F_p$  için,

$$ax + by + cz + d = 0$$

denklemini sağlayan  $(x, y, z)$  noktalar kümesine  $F_p^3$  uzayının bir **düzlem**i denir. Biz  $(0, 0, 0)$  noktasını içeren düzlemlerle, yani her üçünün de 0 olmadığı  $a, b, c \in F_p$  için,

$$ax + by + cz = 0$$

denklemini sağlayan düzlemlerle ilgileneceğiz. Bu türden iki farklı düzlem mutlaka tam  $p$  noktada kesişir. Bu kesişim kümelerine  $F_p^3$  uzayının  $(0, 0, 0)$  noktasından geçen **doğruları** adı verilir. Doğrular, bir  $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$  için,



$\{(tu, tv, tw) : t \in F_p\}$  biçiminde olan kümelerdir (okura alıştırmaya).

Şimdi adına  $\pi(p)$  diyeceğimiz bir geometri tanımlayacağız:

$\pi(p)$ 'nin doğruları,  $F_p^3$  uzayının  $(0, 0, 0)$  noktasından geçen düzlemleri olacak.

$\pi(p)$ 'nin noktaları,  $F_p^3$  uzayının  $(0, 0, 0)$  noktasından geçen doğruları olacak.

Yani  $F_p^3$  uzayının  $(0, 0, 0)$  noktasından geçen bazı düzlem ve doğruları,  $\pi(p)$  düzleminin doğru ve noktaları oldu.

$\pi(p)$ 'nin bir noktasının ne zaman  $\pi(p)$ 'nin bir doğrusu üzerinde olduğunu söylememiz lazım. Söyleyelim: Eğer noktayı temsil eden doğru, doğruyu temsil eden düzlemin içindeyse o zaman o noktanın o doğrudaki olduğunu söyleyeceğiz. Örneğin,

$$\{(t, 2t, 3t) : t \in F_p\}$$

doğrusuyla temsil edilen  $P$  noktası,

$$x + y - z = 0$$

düzlemleriyle temsil edilen doğrudadır. Bu  $P$  noktası ayrıca,

$$2x - y = 0$$

$$3x - z = 0$$

$$3y - 2z = 0$$

$$5x - y - z = 0$$

düzlemleriyle temsil edilen doğruların da üstündedir.

$\pi(p)$  izdüşümsel bir düzlemdir ve  $A(p)$  ile  $\pi(p)$  sayfa 45'teki teoremden ve o teoremin kanıtında açıklanan ilişki içindedirler.

Bu oyunlarla ilgili iki sorumuz var:

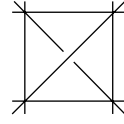
1.  $A(p)$  ve  $\pi(p)$  düzlemleri üzerinde oynanan oyunlarının hangilerinde birinci oyuncunun (İksan'ın yani) kazandığı bir strateji vardır, hangilerinde Oya oyunu beraberliğe zorlayabilir?

2. Bu oyunlarının hangilerinde oyun berabere bitebilir?

İkinci soruda oyuncuların kazanmak için değil, berabere kalmak için oynadıklarını varsayacağız. Oyuncular berabere kalmayı başarabilirler mi?

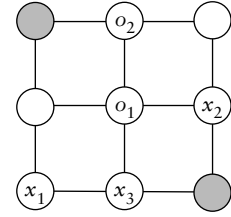
$\pi(2)$  düzlemi yukarıda verdiğimiz 7 noktalı ve 7 doğrulu düzlem. Bu oyunu birinci oyuncunun (İksan'ın) kazandığını yukarıda gördük.

Şimdi  $A(2)$  oyununu ele alalım. Bu oyun çok basit. Bu oyunu da İksan kazanır. Hem de nasıl oynarsa oynasın ikinci hamlesinde kazanır, çünkü bu düzlemde herhangi iki nokta bir doğru belirler. Bu,  $A(2)$  için hem birinci hem de ikinci soruyu yanıtlıyor.  $A(2)$  oyununda istense de berabere kalmamaz.



Ya  $A(3)$  oyununu kim kazanır? Bu oyunu da birinci oyuncunun kazanacağını kanıtlamak zor değil. Önce İksan'la Oya'nın ilk hamlelerinin önemsiz olduğunda anlaşalım, çünkü yapılabilecek tüm ilk iki hamleler birbirine eşdeğerdir. Nitekim bu geometride iki değişik noktayı herhangi iki değişik noktaya götüren ve doğruları doğrulara yollayan bir dönüşüm vardır. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz. (Bu dediğimiz tüm  $A(p)$  ve  $\pi(p)$  düzlemleri için geçerli.)

Yandaki şekilde İksan'ın ve Oya'nın hamlelerini  $x_1, x_2, \dots$  ve  $o_1, o_2, \dots$  olarak gösterdik.  $x_1$ 'le  $o_1$  hamlelerinin nereye yapıldıkları önemli değil. Bu iki hamle yapıldıktan sonra İksan ikinci hamlesinde Oya'yı tehdit ederek, Oya'yı tek bir yere oynamaya mahkûm eder. Ve ardından iki değişik yerden kazanabileceği (gri noktalar) bir hamle yaparak ( $x_3$  hamlesi) Oya'yı çaresiz bırakır.



Alıştırma.  $A(3)$  ve  $\pi(2)$  oyunları istense de berabere bitemez.

Konuyla ilgili sonuç şunlar:

**Teorem [CD].** *Eğer  $p \geq 3$  ise  $\pi(p)$  oyunlarında Oya'nın berabere kalabileceği bir stratejisi vardır. Eğer  $p \geq 5$  ise  $A(p)$  oyunlarında Oya'nın berabere kalabileceği bir stratejisi vardır.*

Kanıtı burada veremeyeceğiz. Dileyen [CD] referansına bakabilir. ♣

notes	notlar
_____	■
_____	■
_____	■
_____	■
_____	■
_____	■
_____	■
_____	■
_____	■
_____	■