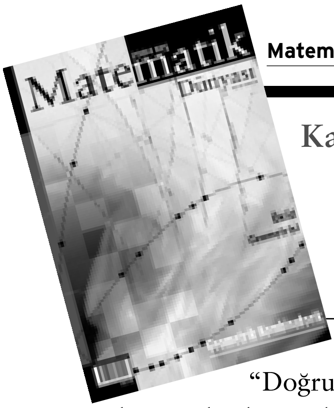
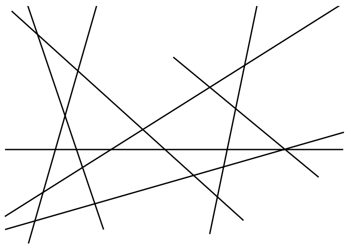


Kapak Konusu: Geometrik Kombinatorik

Afin ve İzdüşümsel Düzlemler

Selda Küçükçifçi* / *skucukcifci@ku.edu.tr*

Oluşum Geometrisi. "Doğru" dendiğinde aklımıza dümdüz ve dosdoğru doğrular gelir. İşte birkaç dosdoğru doğru.



Her iki sonsuza doğru sağa sola sapmadan dümdüz giden nesneler...

Bu yazıda soyut matematiğe ciddi bir adım atarak "doğru" hakkındaki düşüncemizi değiştireceğiz.

Bir ***doğru***, bundan böyle, noktalardan oluşan bir küme olacak, o noktalar her neyse... Her doğru bazı noktalardan oluşan bir küme olacak, yani her doğru, noktalar kümesinin bir altkümesi olacak.

Bu tanımdan da anlaşılacağı üzere, bundan böyle bir ***doğru***, elemanları noktalar olan bir küme. Dikkat: Noktalardan oluşan her kümenin bir doğru olduğunu söylemedik, sadece her doğrunun noktalardan oluşan bir küme olduğunu söyledik. Hangi noktalar kümesinin doğru olduğuna biz karar vereceğiz.

Bir sonraki sorumuz, doğal olarak, noktanın ne olduğu. ***Nokta***, sadece "noktalar kümesi"nin herhangi bir öğesi olacak.

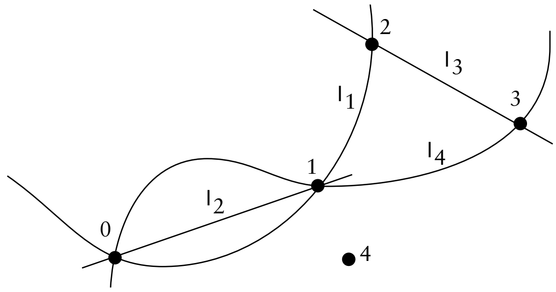
Ve bir sonraki kaçınılmaz soru, elbette, noktalar kümesinin ne olduğudur. Yanıt: Noktalar kümesi, noktalar kümesi olmasını istediğimiz herhangi bir küme olsun...

Örneğin, noktalar kümesi olarak {0, 1, 2, 3, 4} kümesini alalım. Doğru olarak da,

$$l_1 = \{0, 1, 2\}$$
$$l_2 = \{0, 1\}$$
$$l_3 = \{2, 3\}$$
$$l_4 = \{0, 1, 3\}$$

nokta kümelerini alalım. Böylece bir "geometri" elde ettik, noktalardan ve doğrulardan oluşan ve her doğrunun bir noktalar kümesi olduğu bir geometri. Böyle tanımlanmış bir geometriye ***oluşum geometrisi***[1] adını verelim.

Yukardaki "geometri", varolması için matematiksel hiçbir neden olmayan bir geometri olabilir. Ama gene de bir geometridir. "Resmini" çizebiliriz:



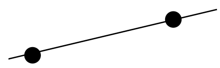
Bu geometride bazı doğrular iki noktadan (l_2 ve l_3 doğruları), bazı doğrular üç noktadan (l_1 ve l_4 doğruları) oluşurlar. 4 adlı noktadan doğru geçmez.

Bunun gibi binlerce "geometri" vardır. Kimi hava gibi su gibi yararlıdır, kimi de yukardaki örnekte olduğu gibi hiçbir işe yaramaz, hava cıvadır!

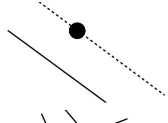
Yukardaki geometride l_2 ve l_3 doğruları kesişmiyorlar, ama diğer tüm doğrular kesişirler. Kesişmeyen doğrulara ***paralel*** doğrular diyelim. Bir de ayrıca her doğrunun kendisine paralel olduğunu varsayalım.

Afin Düzlem. ***Afin düzlem*** aşağıdaki üç koşulu sağlayan bir oluşum geometrisidir:

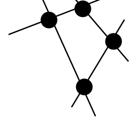
A1. *Herhangi iki farklı noktadan tek bir doğru geçer.*



A2. *Herhangi bir noktadan herhangi bir doğruya tek bir paralel geçer.*



A3. *Üçünün aynı doğru üzerinde olmadığı en az dört nokta vardır.*



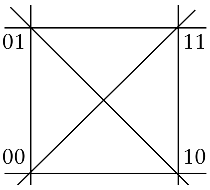
Hemen örnek verelim. İlk örneğimiz en küçük afin düzlem örneği.

---

* Koç Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.

1 İngilizcesi "incidence geometry".

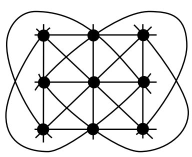
Örnek 1. Noktalar kümesi {00, 01, 10, 11} olsun. Doğrular da iki noktalı tüm nokta kümeleri olsun. Böylece bir afin düzlem elde ederiz.



Örnek 2. Noktalar kümesi

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

olsun. Doğrular da {1, 2, 3}, {1, 4, 7}, {1, 5, 9}, {1, 6, 8}, {4, 5, 6}, {2, 5, 8}, {2, 6, 7}, {2, 4, 9}, {7, 8, 9}, {3, 6, 9}, {3, 4, 8}, {3, 5, 7} olsun. Bu bir afin düzlem örneğidir. Burada toplam 9 nokta ve 12 doğru var. Her doğruda 3 nokta var. Ayrıca her noktadan 4 doğru geçiyor. Birazdan göreceğimiz üzere, böyle bir düzen her afin düzlemde vardır.



Bir afin düzlemde A ve B birbirinden değişik iki noktaysa, A1'e göre bu iki noktadan tek bir doğru geçer. Bu doğruya AB doğrusu adını verelim. Ayrıca ℓ_1 ve ℓ_2 iki farklı doğruysa, bu iki doğru ya paraleldirler ya da tek bir noktada kesişirler. İkinci şıkta kesişim noktasını $\ell_1 \cap \ell_2$ olarak gösterebiliriz. Bu nokta bazen $\ell_1\ell_2$ olarak da gösterilir.

Okur herhalde afin düzlemlerin alışık olduğumuz Öklid düzlemine çok benzediğinin farkına varmıştır. Öklid düzlemi elbette bir afin düzlemdir.

Teorem 1. *Sonlu tane noktası olan bir afin düzlem olsun. Öyle bir $n \geq 2$ doğal sayısı vardır ki,*

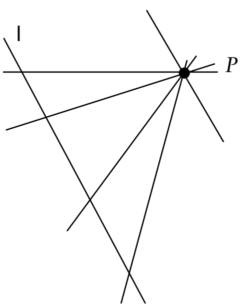
1. *Toplam nokta sayısı n^2'dir.*

2. *Toplam doğru sayısı $n^2 + n$'dir.*

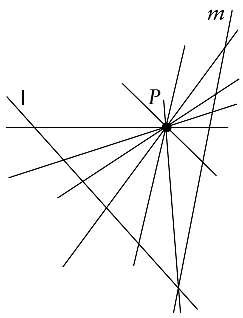
3. *Her nokta tam $n + 1$ doğru üzerindedir.*

4. *Her doğruda tam n nokta vardır.*

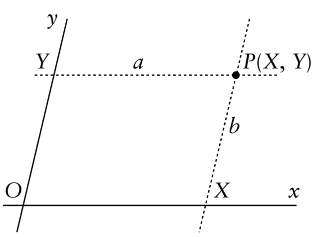
Kanıt: Herhangi bir ℓ doğrusu ve ℓ'de olmayan herhangi bir P noktası seçelim. ℓ'nin üstündeki nokta sayısına n deyip P'den geçen doğruları sayalım. A2'den dolayı bu doğrulardan sadece biri ℓ ile kesişmez. A1'den dolayı da P'den geçen diğer tüm doğrular ℓ ile **tek** bir noktada kesişir ve ℓ'nin üstündeki her nokta P'den geçen bir doğru belirler. Demek ki P'den, biri ℓ'ye paralel diğerleri ℓ'yi kesen toplam $n + 1$ tane doğru geçer.



Yukarda kanıtladığımızdan şu çıkar: P'den geçmeyen her doğruda tam n tane nokta vardır ve ℓ'de bulunmayan her noktadan $n + 1$ tane doğru geçer. Şimdi ℓ ve m iki doğruysa, bu iki doğrunun üstünde olmayan bir nokta alalım, ki böyle bir noktanın varlığını A3'ten biliyoruz. Demek ki ℓ ve m de aynı sayıda nokta var (P'den geçen doğru sayısından bir eksik). Bu sayıya n diyelim. Böylece her noktadan $n + 1$ tane doğru geçtiği de kanıtlanmış oldu.



O adını vereceğimiz noktada kesişen herhangi iki x ve y doğrusu alalım. $X \in x$ ve $Y \in y$ olsun. X'ten geçen ve y'ye paralel doğruya b ve Y'den geçen ve x'e paralel doğruya a diyelim. a, b'ye paralel olamaz (neden?) Bu a ve b doğrularının kesişim noktasına $P(X, Y)$ diyelim. Böylece $X \in x$ ve $Y \in y$ olmak üzere, her (X, Y) nokta çiftinden düzlemimizin bir $P(X, Y)$ noktasın elde ettik. Bu bize $x \times y$ kümesinden noktalar kümesine giden bir fonksiyon verir. Bu fonksiyonun birebir ve örten olduğunu kanıtlamak zor değildir, yani her P noktası bu yolla tek bir $(X, Y) \in x \times y$ nokta çiftinden elde edilir. Demek ki düzlemin nokta sayısı $|x \times y| = |x| \times |y| = n^2$'dir.



Son olarak doğruları sayalım: Düzlemin n^2 noktası arasından seçilen her iki değişik nokta bize bir doğru verir. Seçebileceğimiz toplam iki farklı nokta sayısı

$$\binom{n^2}{2} = \frac{n^2(n^2-1)}{2}$$

dır. Ama o iki nokta aynı doğru üstünde seçilmişse o zaman aynı doğruyu elde ederiz. Bir doğru üzerinde seçilebilecek farklı nokta çifti sayısı da,

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

dir. Dolayısıyla düzlemdeki doğru sayısı,

$$\frac{\binom{n^2}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{\frac{n^2(n^2-1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} = n(n+1) = n^2 + n$$

dir. Aslında yukarda yapılan,

$$\{(A, B, \text{l}) : A \neq B \text{ ve } A, B \in \text{l}\}$$

kümesinin eleman sayısını iki değişik biçimde saymaktan başka bir şey değildir. □

Teoremdeki n sayısına afin düzlemin ***derece***si denir. Sayfa 49'da birçok afin düzlem örneği göreceğiz.

İzdüşümsel Düzlem. Hiç kesişmemesi gereken paralel doğrular doğada sonsuzda kesişirmiş gibi görünürler. Örneğin, trenin geçmeyeceği saate denk getirerek iki tren rayının ortasına geçin ve raylara raylar boyunca bakın (sakın yapmayın, ama illa yapacaksanız arada bir arkanıza bakın.) Paralel tren rayları çok bariz bir biçimde sonsuzda kesişirler! İşte izdüşümsel düzlem, herhangi iki doğrunun kesiştiği bir oluşum geometrisidir. Matematiksel tanımı ilerde vereceğiz, ama önce bir afin düzleme nasıl bir doğru daha ekleyerek herhangi iki doğruyu kesiştirebileceğimizi gösterelim.

Herhangi bir afin düzlem alalım. Verilmiş bir doğruya paralel olan doğrular kümesine ***paralellik sınıfı*** denir. Paralellik sınıfındaki doğrular birbirine paraleldir (bkz. sf. 45, Alıştırma 2.) Şimdi aşağıdaki şekilden izleyin. Her paralellik sınıfı için afin düzleme yepyeni bir nokta ekleyelim. Bu nokta paralellik sınıfındaki tüm doğruların kesişeceği "sonsuzdaki nokta" olacak. Yani afin düzleme yeni noktalar ekleyelim ve birbirine paralel olan doğrulara aynı noktayı ekleyerek, bunların kesişmelerini sağlayalım. Sonra eklediğimiz bu yeni noktaları tek bir doğruda, "sonsuzdaki doğruda" toplayalım. Eğer başladığımız afin düzlemin derecesi n ise,

- $n^2 + n + 1$ noktalı
- $n^2 + n + 1$ doğrulu
- her doğruda $n+1$ noktanın olduğu
- her noktadan $n + 1$ doğrunun geçtiği

bir oluşum geometrisi elde ederiz. Bu oluşum geometrisinin şu özellikleri vardır:

B1. *Herhangi iki değişik noktadan tek bir doğru geçer.*

B2. *Herhangi iki değişik doğru tek bir noktada kesişir.*

B3. *Üçünün aynı doğru üzerinde olmadığı en az dört nokta vardır.*

İzdüşümsel düzlem yukardaki üç beliti sağlayan bir oluşum geometrisidir. İzdüşümsel geometride kesişmeyen paralel doğrular yoktur, herhangi iki doğru kesişir.

Demek ki her afin düzlem, yukarda açıkladığımız yöntemle bir izdüşümsel düzlem verir. Bunun tersi de doğrudur: Bir izdüşümsel düzlemde, doğrulardan birini "sonsuzdaki doğru" olarak algılayıp ve nitelendirip bu doğruyu ve üstünde bulunan noktaları atarsak geriye bir afin düzlem kalır. Bunun kanıtı oldukça kolaydır ve okura bırakılmıştır. Demek ki sonlu bir izdüşümsel düzlemde de her doğruda aynı sayıda nokta vardır. Eğer bu sayıyı $n + 1$ olarak yazarsak, n'ye izdüşümsel düzlemin ***derece***si denir.

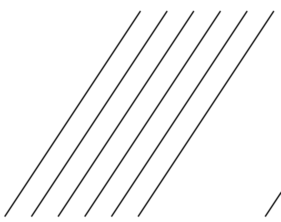
Örnek 1. Noktalar kümesi

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

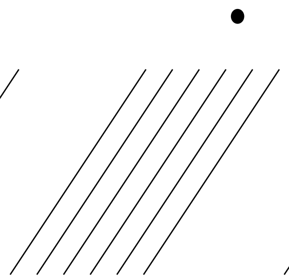
ve doğrular da

$$124, 235, 346, 457, 156, 267, 137$$

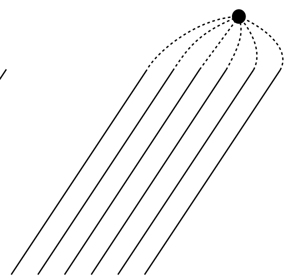
olsun. (Burada {1, 2, 4} doğrusunu 124 olarak gösterdik.) Bu bir izdüşümsel düzlem örneğidir. Sayfa 28'de çizilen geometri bu geometridir. Bu izdüşümsel düzlem, ayrıca, yazının başında verdiğimiz 4 noktalı afin düzlemden yukardaki yöntemle elde edilen izdüşümsel düzlemdir. Kanıtları okura bırakıyoruz.



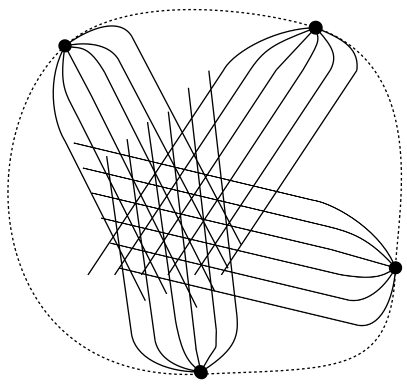
Afin düzlemde birbirine paralel doğrular; yani bir paralellik sınıfı



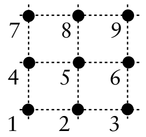
Her paralellik sınıfı için düzleme yeni bir nokta ekleyelim.



Paralellik sınıfının doğruları eklediğimiz bu yeni noktadan geçsinler. Bunu her paralellik sınıfı için yapalım.



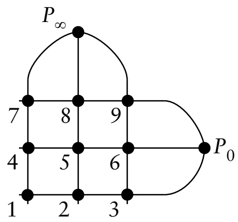
Eklediğimiz yeni noktalar için yeni bir doğru (noktalı olan) yaratalım. Bu, "sonsuzdaki" doğrumuz.



Örnek 2. Yazının başında verdiğimiz 9 noktalı afin düzlem örneğimize bakalım. Doğruları şöyle yazalım: 123, 147, 159, 168, 456, 258, 267, 249, 789, 369, 348, 357.

Dört paralel sınıf var:

123, 456, 789;
159, 267, 348;
168, 249, 357;
147, 258, 369.



Bu paralel sınıfların herbiri için düzleme bir nokta ekleyelim. Bu noktalara sırasıyla P_0, P_1, P_2 ve P_∞ diyelim. Ve bu noktaları l_∞ adını verebileceğimiz bir doğruda toplayalım. Bir izdüşümsel düzlem elde ederiz. Elde ettiğimiz izdüşümsel düzlemin noktaları

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, P_0, P_1, P_2 \text{ ve } P_\infty$$

dur. Doğruları da,

$123P_0$, $456P_0$, $789P_0$
$159P_1$, $267P_1$, $348P_1$
$168P_2$, $249P_2$, $357P_2$
$147P_\infty$, $258P_\infty$, $369P_\infty$

doğruları ve "sonsuzdaki"

$$P_0P_1P_2P_\infty$$

doğrusudur. (Buna l_∞ adını vermiştik.) Böylece, afin düzlemde kesişmeyen 159 ve 267 doğruları, izdüşümsel düzlemde P_1 noktasında kesişen $159P_1$ ve $267P_1$ doğrularına dönüşürler.

Sayfa 50'de birsürü izdüşümsel düzlem örneği göreceğiz.

Teorem 2. *Derecesi n olan bir afin düzlemden derecesi n olan bir izdüşümsel düzlem, derecesi n olan bir izdüşümsel düzlemden de yine derecesi n olan bir afin düzlem elde edilebilir.*

Her ne kadar izdüşümsel düzlemle afin düzlem "denk" kavramlarsa da, izdüşümsel düzlemlerle çalışmanın azımsanmayacak bir üstünlüğü vardır. Her şeyden önce izdüşümsel geometride doğruları paralel ya da kesişen doğrular olarak ikiye ayırmaya gerek yoktur; yani izdüşümsel geometride afin geometride olduğu gibi bir teoremin kanıtını şıklara ayırmaya gerek yoktur. Bu hatırı sayılır bir kolaylık sağlar. Ayrıca, bir izdüşümsel düzlemde noktaları doğru, doğruları nokta yaparak gene bir izdüşümsel geometri elde ederiz: Eğer işe başladığımız düzlemde P noktası l doğrusundaysa, ikinci düzlemde l noktası P doğrusunda olsun. Bu da izdüşümsel düzlemde afin düzlemde olmayan bir simetri sağlar. Bu simetri B1 ve B2 koşullarında çok barizse de, B3 koşulunda o kadar bariz değildir. Bunu okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Alıştırmalar

1. Bir izdüşümsel düzlemde herhangi üçünün aynı noktadan geçmediği dört doğru vardır.

2. Bir afin düzlemde a doğrusu b'ye paralelse ve b doğrusu c'ye paralelse, a doğrusunun c'ye paralel olduğunu kanıtlayın.

Düzlemler ve Tasarımlar

Eğer doğruları blok, blokları da doğru olarak yorumlarsak yukardaki teoremlerden şu sonuç çıkar:

Sonuç. *$n \geq 2$ pozitif bir tamsayı olsun.*

Sonlu her afin düzlem bir 2-(n^2, n, 1) tasarımıdır. Her 2-(n^2, n, 1) tasarımı da bir afin düzlemdir.

Sonlu her izdüşümsel düzlem bir 2-(n^2+n+1, $n+1$, 1) tasarımıdır. Her 2-(n^2+n+1, $n+1$, 1) tasarımı da bir izdüşümsel düzlemdir.

Afin Düzlemler ve Latin Kareler

Sayfa 10'da n-inci dereceden birbirine dik en fazla $n - 1$ tane latin kare olduğunu kanıtlamıştık. Diyelim tam $n - 1$ tane birbirine dik n-inci dereceden latin kare var. Bunlara $L_1, L_2, ..., L_{n-1}$ diyelim. Bir oluşum geometrisi tanımlayacağız. Noktalar $1 \leq i, j \leq n$ için (i, j) çiftleri olsun. Noktaları $n \times n$ boyutlu tabloya aşağıdaki gibi yerleştirelim.

$$\begin{array}{cccc} (1, 1) & (2, 1) & ... & (n, 1) \\ (1, 2) & (2, 2) & ... & (n, 2) \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & ... & \mathrm{M} \\ (1, n) & (2, n) & ... & (n, n) \end{array}$$

Doğruları şöyle tanımlayalım:

1) Yukardaki dizinin her sütunundaki girdiler bir doğru oluştursun.

2) Yukardaki dizinin her satırındaki girdiler bir doğru oluştursun.

3) Her s simgesi ve her latin kare için, s'nin o latin karede göründüğü pozisyonlar kümesi bir doğru oluştursun.

Tüm bu nokta ve doğrular, derecesi n olan bir afin düzlem oluşturur. (1)'deki n doğru bir paralel sınıf, (2)'deki n doğru diğer bir paralel sınıf, (3)'teki her latin karesi de birer paralel sınıf verir. Toplam $n + 1$ paralel sınıf ve $n^2 + n$ doğru elde etmiş oluruz.

Örnek: $n = 4$ olsun. Birbirine dik olan,

L_1	L_2	L_3
1243	1342	1423
2134	4213	3241
4312	2431	4132
3421	3124	2314

latin karelerini alalım. 16 tane noktamız var:

$$(1, 1), (1, 2), ..., (4, 4).$$

Bu noktaları kolaylık olsun diye 11, 12, ..., 44 olarak daha kısa biçimde yazalım. Doğrularımız şunlar:

Birinci tip:

11, 12, 13, 14
21, 22, 23, 24
31, 32, 33, 34
41, 42, 43, 44

İkinci tip:

11, 21, 31, 41
12, 22, 32, 42
13, 23, 33, 43
14, 24, 34, 44

Üçüncü tip:

L_1'den kaynaklananlar:

11, 22, 33, 44
21, 12, 43, 34
41, 32, 23, 14
31, 42, 13, 24

L_2'den kaynaklananlar:

11, 32, 43, 24
41, 22, 13, 34
21, 42, 33, 14
31, 12, 23, 44

L_3'ten kaynaklananlar:

11, 42, 23, 34
31, 22, 43, 14
41, 12, 33, 24
21, 32, 13, 44

Farkettiyseniz bu inşa yöntemini tersten uygularsak dik latin kareleri tam kümesi elde ederiz. Böylece aşağıdaki teoremi buluruz.

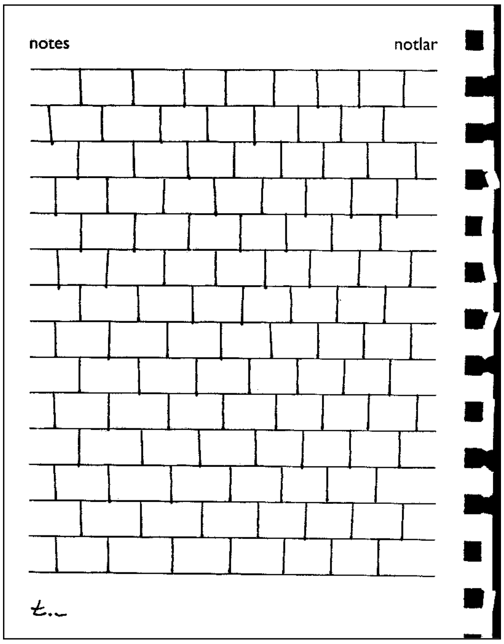
Teorem 4 (R.C. Bose, 1938). *n dereceli birbirine dik n–1 tane latin karesi olması için yeter ve gerek koşul n dereceli izdüşümsel bir düzlemin olmasıdır.*

Eğer p bir asal, $t > 0$ bir doğal sayı ve $n = p^t$ ise, $n - 1$ tane birbirine dik n-inci dereceden latin kare olduğu sayfa 10-11'de kanıtlanmıştı. Demek ki bu durumda derecesi n olan afin düzlem (dolayısıyla izdüşümsel düzlem) vardır. Sadece asal güçler için afin düzlem varlığı bilinmekte. R. H. Bruck ve H. J. Ryser'in aşağıdaki teoremi asal bir sayının kuvveti olmayan bazı n değerleri için afin düzlemlerin olmadığını gösteriyor.

Teorem 5. (R. H. Bruck ve H. J. Ryser [BR]) *$n \equiv 1$ ya da 2 (mod 4) olsun. Ayrıca, $p \equiv 3$ (mod 4) denkliğini sağlayan ve n'yi bölen en büyük gücünün tek sayı olduğu bir p asalı olsun. Bu durumda derecesi n olan bir afin düzlem yoktur.*

Bu teorem derecesi 6, 14 ve 22 olan afin düzlemlerin olmadığını söyler. Ama 10 ve 12 için bir şey söylemez. Derecesi 10 olan bir afin düzlemin olmadığı bilgisayar yardımıyla yakın zamanda gösterilmiştir. 10'dan sonraki belirlenmemiş en küçük değer 12'dir. Genel kanı böyle bir afin düzlemin olmadığı yönünde.

Açık Soru: *Bir asal sayının gücü olarak yazılamayan bir n için derecesi n olan bir afin (ya da izdüşümsel) düzlem var mı?*



Afin ve izdüşümsel düzlemler konusu matematiğin en heyecanlı ve en aktif konularından biridir. Bu önemli konuya hakettiği yeri bir başka sayımızda ayırırız.

Tahmin edileceği gibi bilgisayarcılar konuya bulaşmışlardır. Başat amaç sonlu düzlemlerin sınıflandırılmasıdır. Bugün bu amacın çok çok uzağındayız. Belki 21'inci yüzyılda bu amaca ulaşılır. Yaşayan görür! ♣