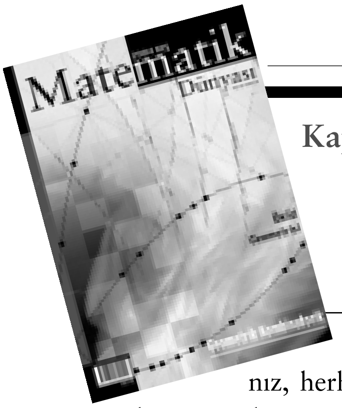


Kapak Konusu: Geometrik Kombinatorik

Latin Kare İnşa Etmek

Sibel Özkan* / *ozkansi@auburn.edu*

Önceki yazıları okumuşsanız, herhalde latin kare oluşturmaya çalışmış ve bunun pek o kadar zor olmadığını görmüşsünüzdür. Nitekim latin kare oluşturmak çok kolaydır, başaramamak nerdeyse imkânsızdır.

Bir $n \times n$ latin karesi oluşturmak için herkesin aklına ilk gelen yöntem (demek ki en doğalı!), önce, birinci sıraya 1, 2, ..., n sayılarını rastgele (örneğin bu sırayla!) yazmak, sonra, latin kare olma özelliğinin bozulmamasına dikkat ederek sıraları yukardan aşağıya doğru doldurmayı sürdürmek...

Örneğin, $n = 4$ için, latin karemize

1 2 3 4

sırasıyla başlayabiliriz. Sonra,

3 4 2 1

ikinci sıramız olabilir. Latin karemizin ilk iki sırası oluştu bile:

1 2 3 4
3 4 2 1

Sütunlarda önceki sayıları tekrar etmediği için,

2 1 4 3

üçüncü sıramız olabilir. Üçüncü sıranın seçimi son sıranın

4 3 1 2

olmasını zorunlu kılar. Böylece aşağıdaki 4×4 latin karesini inşa etmiş olduk:

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

Akla ilk gelen bu çocukça yöntemi kullanarak her zaman bir latin kare inşa edilebilir mi? Yani, hiç tıkanmadan bir sonraki sırayı seçmek hep mümkün müdür? Bu yazıda bu ve buna benzer soruları yanıtlayacağız.

Üstteki örnekte, üçüncü sırayı bulma sorusuna şu şekilde de bakabiliriz: A_i, üçüncü sıranın i-inci sütununa ekleyebileceğimiz sayılardan oluşan küme olsun. Bir başka deyişle, A_i, {1, 2, 3, 4} sayılarından i-inci sütunda henüz yer almamış olanlarının oluşturduğu küme olsun.

İlk iki sıra örnekteki gibi seçildiğinde,

$$A_1 = \{2, 4\},\ A_2 = \{1, 3\},\ A_3 = \{1, 4\} \text{ ve } A_4 = \{2, 3\}$$

olur. O zaman, üçüncü sırayı seçmekle, A_1, A_2, A_3, A_4 kümelerinin herbirinden **farklı** birer eleman seçmek aynı anlama gelir. Örneğimizde seçimimiz,

$$2 \in A_1,\ 1 \in A_2,\ 4 \in A_3,\ 3 \in A_4$$

idi, yani üçüncü sırayı (2 1 4 3) olarak seçtik. Bu seçim,

$$4 \in A_1,\ 3 \in A_2,\ 1 \in A_3,\ 2 \in A_4$$

şeklinde de olabilirdi. Tabii o zaman son sıramızı değiştirmemiz gerekecekti.

Herhangi bir A_1, A_2, ..., A_n kümeler topluluğu için ***farklı temsilciler sistemi*** ya da kısaca ***FTS***, kümelerin herbirinden seçilen birer farklı elemandan oluşan $(x_1, x_2, ..., x_n)$ n'lisidir. Her i için, $x_i \in A_i$ koşulu sağlandığından, her x_i'ye A_i'nin ***temsilcisi*** denir.

Bu aşamada karşımıza, “herhangi bir kümeler topluluğu için her zaman bir FTS bulunabilir mi?” sorusu çıkar. Bu sorunun yanıtı olumsuzdur elbette, uzun uzun düşünmeye gerek yok, en basitinden, A_i kümelerinden biri boşsa FTS bulamayız. Biraz daha ilginç bir örnek:

$$A_1 = \{1\},\ A_2 = \{2\},\ A_3 = \{1, 2\}.$$

Bu üç küme için de bir FTS bulunamaz elbette. Çözümlemesi birazcık daha güç bir örnek:

$$A_1 = \{1, 3\}$$
$$A_2 = \{1, 2, 3\}$$
$$A_3 = \{4, 5, 6\}$$
$$A_4 = \{1, 2\}$$
$$A_5 = \{2, 3\}$$

kümelerine de ait bir FTS yok, çünkü A_1, A_2, A_4 ve A_5'in bileşimlerinde sadece üç eleman var: 1, 2 ve 3 ve bu yüzden bu dört kümeyi temsil eden dört farklı eleman seçmemiz mümkün değil.

Bu örnek, bir kümeler topluluğunun FTS'ye sahip olabilmesi için, topluluğun her k kümesinin bileşiminin en az k elemana sahip olması gerektiğini gösteriyor; yoksa kümeler topluluğunun FTS'si olamaz. Phillip Hall, 1935'te, FTS'nin olması için bu koşulun yettiğini kanıtlamıştır.

* Auburn Üniversitesi Matematik Bölümü doktora öğrencisi. Bu yazı için [And] ve [Wal] kitaplarından yararlanılmıştır. Ayrıca Auburn Üniversitesi'nden Charles Lindner'ın ders notlarına ve Chris Rodger'ın bilgisine başvurulmuştur.

Teorem (P. Hall, 1935). $A_1, A_2, ..., A_n$ *kümeler topluluğunun bir FTS'ye sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul, kümelerden her k tanesinin* (k = 1, 2, ..., n) *bileşiminin en az k elemana sahip olmasıdır.*

Her A_i kümesini, i-inci genç kızın evlenmek istediği delikanlıların listesi olarak düşünürsek, o zaman teorem, her genç kızın kendi listesinde bulunan ama diğerlerinin evlendiklerinden farklı biriyle evlenebilmesi için gerek ve yeter koşulun, her $k \leq n$ için, herhangi k kızın listelerinin bileşiminde en az k ismin bulunması olduğunu söyler. Bu yüzden bu teorem matematikte ***Çöpçatanlık Teoremi*** olarak ün salmıştır. MD-2003-III, sayfa 21-23'te bu teorem kanıtlanmıştı.

1945'te Marshall Hall (Phillip Hall ile bir akrabalığı yoktur), adaşının teoremini kullanarak latin dikdörtgenleriyle ilgili çok ilginç ve yararlı bir teorem kanıtlamıştır. Bu teorem bize, 4 × 4 latin kare örneğindeki yöntemin her zaman başarıya ulaşacağını söylüyor. M. Hall'un teoremine geçmeden önce, teoremin kullandığı terminolojiyi açıklayalım.

1, 2, ..., n sayılarından her birinin her sırada sadece bir kez, her sütunda ise en fazla bir kez yer aldığı $r \times n$ ($r \leq n$) sayı dizisine ***latin dikdörtgeni*** adı verilir. Örneğin,

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{matrix}$$

3 × 6 boyutlu bir latin dikdörtgenidir.

$r \times n$ boyutlu bir R latin dikdörtgeni bir K latin karesinin ilk r sırasını oluşturuyorsa, R, K'ye ***gömülüyor*** denir. Örneğin 1 × 4 boyutlu 1 2 3 4 latin dikdörtgeni bir önceki sayfadaki 4 × 4 latin karesine gömülür.

Teorem (M. Hall, 1945). *Her* $r \times n$ *latin dikdörtgeni,* $n \times n$ *boyutlu bir latin kareye gömülebilir.*

Kanıt: R, $r \times n$ bir latin dikdörtgeni, A_i de R'nin i-inci sütununda olmayan 1'den n'ye kadar simgelerin kümesi olsun. İlk olarak, $A_1, ..., A_n$ kümelerine ait bir FTS olduğunu göstereceğiz. Her A_i'nin $n - r$ eleman içerdiğine dikkatinizi çekerim.

Bu $A_1, ..., A_n$ kümelerinden k (= 1, 2, ..., n) tanesini seçelim. İlk k tanesini seçtiğimizi varsayabiliriz: Seçtiğimiz kümeler $A_1, ..., A_k$ olsun. Her A_i kümesi $n - r$ eleman içerdiğinden,

$$|A_1| + ... + |A_k| = k(n - r).$$

Öte yandan, 1'den n'ye kadar her simge R'nin her sırasında bir kez yer aldığından, her simge tam tamına r sütunda yer alır. Demek ki her simge $A_1, ..., A_n$ kümelerinin tam $n - r$ tanesinde ve dolayısıyla $A_1, ..., A_k$ kümelerinin de en fazla $n - r$ tanesinde yer alır. Bu yüzden, eğer $|A_1 \cup ... \cup A_k| = t$ ise,

$$t(n - r) \geq |A_1| + ... + |A_k| = k(n - r)$$

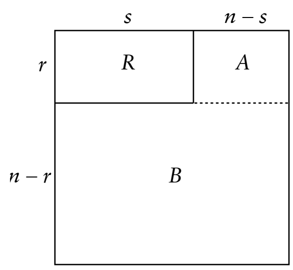
dir. Buradan $t \geq k$ çıkar. Bu da, Philipp Hall Teoremi'nden dolayı, $A_1, ..., A_n$ kümelerine ait bir FTS olduğunu gösterir. Bu FTS'yi R'ye yeni bir sıra olarak ekleyip bir $(r + 1) \times n$ latin dikdörtgeni elde ederiz.

$r + 1 = n$ ise işimizi bitirdik. Değilse, yukarıdaki işlemi tekrarlayıp, R'ye toplamda $n - r$ sıra ekleyerek istediğimiz $n \times n$ latin karesini elde ederiz. Bu da kanıtı tamamlar. □

Latin Kare Sayısı

M. Hall, yukardaki teoremin kanıtında kullandığımız $A_1, A_2, ..., A_n$ kümelerinden en az $(n - r)!$ tane FTS seçebileceğimizi kanıtlamıştır, yani $(r + 1)$'inci sıra için en az $(n - r)!$ tane adayımız var. Bu da n-inci dereceden latin karelerin sayısı için $n!(n - 1)! ... 3!2!1!$ altsınırını verir.

Ryser Teoremi. K herhangi bir $n \times n$ boyutlu latin karesi, R de bu karenin $r \times s$ sol üst köşesi olsun. K'yi aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi parçalara ayıralım.



Her i = 1, 2, ..., n sayısı K'nin her sırasında bir kez yer aldığından, her sayı K'de tam n kez görünür. i'nin R'de, A'da ve B'de yer alma sayılarına sırasıyla $R(i)$, $A(i)$ ve $B(i)$ dersek, $n = R(i) + A(i) + B(i)$ eşitliğini elde ederiz. Elbette $A(i) \leq n - s$ ve $B(i) = n - r$. Buradan,

$$n = R(i) + A(i) + B(i) \leq R(i) + (n - s) + (n - r),$$

ve dolayısıyla $R(i) \geq r + s - n$ eşitsizliklerini elde ederiz.

R'yi n-inci dereceden bir latin kareye gömmek için gerekli koşulun 1, 2, ..., n sayılarından her birinin R'de en az $r + s - n$ kez yer alması olduğunu gösterdik. Ryser Teoremi, bu koşulun aynı zamanda yeter koşul olduğunu söyler:

Teorem (H. J. Ryser). *$s < n$ ve R, 1, 2, ..., n tabanlı $r \times s$ boyutlu latin dikdörtgeni olsun. $R(i)$, $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ sayısının R'de kaç kez yer aldığını göstersin. O zaman, R'nin n-inci dereceden* bir *latin karesine gömülebilmesi için gerek ve yeter koşul, her $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için, $R(i) \geq r + s - n$ eşitsizliğidir.*

Teoremde kullanılan "***taban***"ın ne demek olduğu belli: Karede kullanılan simgeler kümesi.

Ryser Teoremi'ni birazdan çizgelerden yararlanarak kanıtlayacağız. Ayrıca yazının en sonunda bir kez daha kanıtlayacağız. Şimdilik bu önemli teoremin birkaç sonucunu verelim.

Sonuç. *$n \geq r + s$* ise, *$r \times s$ boyutlu her latin dikdörtgen n-inci dereceden bir latin kareye gömülebilir.*

Ryser Teoremi'nin vereceğimiz ikinci sonucu yeni bir paragrafı hakedecek kadar önemlidir.

1		3		5
2	3			
	4	5		2
	5		2	3
5		2	3	4

5inci dereceden kısmi latin kare

Evans Teoremi. Önce bir tanım: ***n-inci dereceden kısmi latin karesi***, yandaki örnekteki gibi, köşegendeki hücreleri dolu ama diğer hücrelerinin hepsi dolu olmak zorunda olmayan n-inci dereceden bir eksik latin kare anlamına gelir.

Teorem (T. Evans). *Herhangi bir r-inci dereceden kısmi latin kare, $n \geq 2r$ eşitsizliğini sağlayan bütün n'ler için n-inci dereceden bir latin kareye gömülebilir.*

Kanıt: P, 1, 2, ..., r tabanlı r-inci dereceden kısmi bir latin kare, n de $n \geq 2r$ eşitsizliğini sağlayan bir tamsayı olsun. r+1, r+2, ..., $2r$ tabanlı r-inci dereceden herhangi bir N latin karesi alalım. (Bir sonraki gri karede bu kanıtı izleyebilirsiniz.) P'nin boş olan hücrelerini N'de o hücreye denk gelen sayıyla doldurarak, 1, 2, ..., $2r$ tabanlı r-inci dereceden bir $\underline{P}$ latin karesi elde edelim. Herhangi bir latin kare, taban olarak aldığı bütün elemanları kullanmak zorunda olmadığından, $\underline{P}$'yi 1, 2, ..., $n \geq 2r$ tabanlı olarak da görebiliriz. Ryser Teoremi'ne göre, $\underline{P}$'yi n-inci dereceden bir latin karesine gömmek için, her $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sayısının $\underline{P}$'de en az $r + r - n$ kere yer alması yeterdir. $n \geq 2r$ olduğundan, Ryser Teoremi'nin koşulu sağlanır. □

Evans Teoremi'nin kanıtındaki tekniği kullanarak kısmi 4 × 4 latin karesini, 8 × 8 latin karesine gömelim:

1	2	3	
	3	2	4
	4	1	
			1

1, 2, 3, 4 tabanlı 4 × 4 kısmi latin karesi P. Taban sayılarını kullanarak bu kareyi tamamlayamayız.

5	6	7	8
6	7	8	5
7	8	5	6
8	5	6	7

5, 6, 7, 8 tabanlı 4 × 4 latin karesi N

1	2	3	8
6	3	2	4
7	4	1	6
8	5	6	1

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 tabanlı 4 × 4 latin karesi $\underline{P}$. Bu kareyi, P'deki boş hücrelere N'nin aynı hücresindeki sayıları yerleştirerek elde ettik.

1	2	3	8	4	5	6	7
6	3	2	4	7	1	8	5
7	4	1	6	2	8	5	3
8	5	6	1	3	7	2	4
4	7	8	5	1	2	3	6
5	1	7	3	8	6	4	2
3	8	5	2	6	4	7	1
2	6	4	7	5	3	1	8

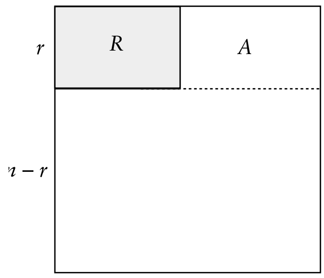
$\underline{P}$'yi gömdüğümüz 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 tabanlı 8 × 8 latin karesi T. $\underline{P}$, bu karenin sol üst köşesini oluşturmaktadır. Tabandaki sayılardan her biri T'de en az 4 + 4 − 8 = 0 kere yer alma koşulunu sağladığından, Ryser Teoremi $\underline{P}$'yi T'ye gömebileceğimizi garantiler.

Ryser Teoremi'nin Birinci Kanıtı

R, 1, 2, ..., n tabanlı, $r \times s$ boyutlu ve Ryser Teoremi'nin koşullarını sağlayan bir latin dikdörtgen olsun. Demek ki, her j = 1, 2, ..., n için,

$$R(j) \geq r + s - n \qquad (*)$$

Bu bölümde R'yi n-tabanlı n-inci dereceden bir latin kareye gömeceğiz. Kanıtta çizgeler kuramından yararlanacağız.



R'nin sıralarına t_i diyelim ($1 \leq i \leq r$) ve bu sıraları birer noktayla gösterelim. İki kümeli bir çizge tanımlayacağız (bkz. MD-2003-III, sayfa 11.) Çizgenin nokta kümelerinden biri,

$$T = \{t_i : 1 \leq i \leq r\},$$

diğeri de,

$$N = \{1, 2, ..., n\}$$

olacak. Kanıtı bir sonraki sayfadaki şekilden izleyebilirsiniz.

Her $t_i \in T$ ve $j \in N$ için, R'nin i-inci sırasında j sayısı yoksa t_i noktasını j noktasına bir kenarla bağlayalım.

Şimdi çizgemizin noktalarının derecelerini hesaplayalım. (Bir noktanın ***derece***si, bağlandığı nokta sayısıdır.)

Her sırada N kümesinden $n - s$ tane sayı eksik olduğundan her t_i noktasının derecesi $n - s$'dir, yani $d(t_i) = n - s$.

Öte yandan, her $j \in N$ için j'nin derecesi, yani j'nin R'de yer almadığı sıraların sayısı da

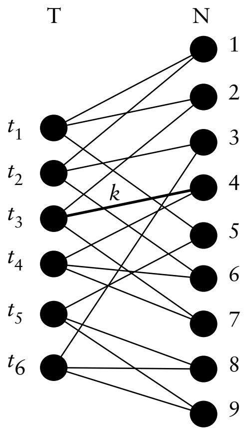
toplam sıra sayısı – j'nin yer aldığı sıraların sayısı dır, yani

$$d(j) = r - R(j).$$

Bu denklemden ve (*)'dan da

$$d(j) \le r - (r + s - n) = n - s$$

eşitsizliğini elde ederiz.



k-inci sütun, 3'üncü sıraya 4 sayısını yerleştiriyoruz.

Demek ki çizgenin noktalarının derecesi en fazla $n - s$. MD-2003-III, sayfa 28'de kanıtlanan König Teoremi'ne göre, bu çizgenin kenarlarını, aynı renge ait kenarlar aynı noktada kesişmeyecek şekilde $n - s$ farklı renge boyayabiliriz. Çizgeyi boyadığımız $n - s$ renge, $s + 1$, $s + 2$, ..., n adlarını verelim.

Şimdi, birazdan inşasını tamamlayacağımız n-inci dereceden latin karenin ilk r sırasını tamamlayalım: (t_i, j) kenarı k rengine boyanmışsa, i-inci sıra ve k-inci sütuna, yani (i, k) hücresine, j sayısını yerleştirelim. Bu suretle elde ettiğimiz $r \times n$ dikdörtgenin latin olduğunu kanıtlayalım:

1. Her $t_i \in T$ için, t_i'ye bağlı olan $n - s$ tane kenar $s + 1$'den n'ye kadar bütün renklerle boyanmış olacağından, i-inci sıranın $s + 1$'den n'ye kadar olan bütün hücreleri dolmuştur.

2. Belli bir t_i noktasına bağlı iki değişik kenar farklı renklere boyandığından, i-inci sıranın yeni doldurulan hücrelerinde $\{1, 2, ..., n\}$ kümesinden farklı bir sayı yer alır.

3. Yeni yerleştirilen sayıların hiçbiri bulunduğu sıranın R kısmında yer alan bir sayı olamaz, çünkü t_i noktasını i sırasında bulunmayan sayılara bağlamıştık.

4. N'nin bir j noktasında aynı renge ait sadece bir kenar bulunabileceğinden, o rengin temsil ettiği sütunda da j yalnızca bir kez yer alabilir.

Bütün bunlar, elde ettiğimiz $r \times n$ dikdörtgeninin latin olma ölçütlerine uyduğunu gösteriyor.

Bu aşamada, elde ettiğimiz $r \times n$ latin dikdörtgenine M. Hall Teoremi'ni uygulayalım. □

Hoffman-Kuhn Teoremi. FTS'ye sahip olmak için kümelerin sağlamaları gereken koşulları P. Hall Teoremi veriyor. Peki, sadece FTS bulmanın yeterli olmadığı, bu FTS'nin önceden belirlenmiş bazı elemanları içermesini istediğimizde ne olacak? Bu bölümde bu sorunun yanıtını vereceğiz.

Teorem (Hoffman ve Kuhn). *$A_1, A_2, ..., A_n$ ve M birer küme olsunlar. $A_1, A_2, ..., A_n$ kümeleri ancak ve ancak aşağıdaki iki koşul sağlandığında M'yi içeren bir* FTS*'ye sahiptir* :

(**i**) *$A_1, A_2, ..., A_n$ bir FTS'ye sahiptir.*

(**ii**) *Her $N \subseteq M$ için, $A_1, A_2, ..., A_n$ kümelerinin en az $|N|$ kadarının N ile kesişimi boşküme değildir.*

Kanıt: $A_1, ..., A_n$ kümelerine ait M'yi içeren bir FTS varsa (i) ve (ii)'nin sağlandığı aşikâr.

Şimdi (i) ve (ii)'nin doğruluğunu varsayalım.

(ii)'de N'yi bir elemanlı altküme alırsak, M'nin her elemanının A_i kümelerinden birinde olduğunu görürüz, yani $M \subseteq A_1 \cup ... \cup A_n$.

Ayrıca, (ii)'de $N = M$ alırsak, $A_1, ..., A_n$ kümelerinden en az $|M|$ kadarının M ile boş olmayan kesişimi olduğunu görürüz. Demek ki $n \ge |M|$. Bu eşitsizliği aklımızın bir köşesine yazalım.

$A_1 \cup ... \cup A_n \subseteq E$ ve $|E| \ge n$ koşullarını sağlayan herhangi bir E kümesi alalım. Ayrıca,

$$A_{n+1} = ... = A_{|E|} = E \setminus M$$

olsun. $A_1, ..., A_n, A_{n+1}, ..., A_{|E|}$ kümelerine ait bir FTS olduğunu göstermek yeterli, çünkü E'nin tüm elemanları bu FTS'de yer alacağından ve $M \subseteq A_1 \cup ... \cup A_n \subseteq E$ olduğundan, bu FTS'nin $A_1, ..., A_n$'yi temsil eden elemanları M'yi içeren bir FTS oluşturacaklardır. Demek ki $A_1, ..., A_n, A_{n+1}, ..., A_{|E|}$ kümelerinin P. Hall Teoremi'nin koşulunu sağladığını göstermeliyiz.

Bu $|E|$ kümeden k tanesini seçelim. Eğer bunların hepsi $A_1, ..., A_n$ arasından seçilmişse, (i) koşulu bize bileşimlerinde en az k eleman olmasını garantiler. Dolayısıyla bizim incelememiz gereken, seçilen bu k kümenin bir kısmının $E \setminus M$'lerden oluştuğu durumdur. Bir başka deyişle, her $0 \le s \le n$ ve $t \le |E| - n$ için,

$$A_1 \cup ... \cup A_s \cup A_{n+1} \cup ... \cup A_{n+t}$$

biçimindeki her bileşimin en az $s + t$ elemana sahip olduğunu göstermemiz gerekiyor. t'yi maksimum değeri olan $|E| - n$ olarak alıp, her $0 \le s \le n$ için,

$$A_1 \cup ... \cup A_s \cup (E \setminus M)$$

bileşiminin en az $|E| - n + s$ elemana sahip olduğunu göstermek yeter.

$A_1, ..., A_n$'den en az $|M|$ tanesinin M ile boş olmayan kesişimleri olduğunu biliyoruz, dolayısıyla $A_1, ..., A_s$ kümelerinin en az $|M| - n + s$ tanesinin M ile kesişimi boş değildir.

Eğer $|M| - n + s \leq 0$ ise, $|A_1 \cup ... \cup A_s \cup (E \setminus M)| \geq |E \setminus M| = |E| - |M| \geq |E| - (n - s) = |E| - n + s$ ve hiç sorun yok. Bundan böyle $|M| - n + s > 0$ olsun.

m_1, $A_1 \cup ... \cup A_s$ ile M'nin kesişiminden herhangi bir eleman olsun. O zaman $A_1, ..., A_s$'nin en az $|M| - n + s - 1$ tanesi $M \setminus \{m_1\}$ ile kesişir.

m_2, $A_1 \cup ... \cup A_s$ ile $M \setminus \{m_1\}$'in kesişiminden herhangi bir eleman olsun. O zaman $A_1, ..., A_s$'nin en az $|M| - n + s - 2$ tanesi $M \setminus \{m_1, m_2\}$ ile kesişir.

Bu şekilde devam ederek, $A_1 \cup ... \cup A_s$'nin, M'nin en az $|M| - n + s$ farklı elemanını içerdiğini görürüz. Buradan da $|A_1 \cup ... \cup A_s \cup (E \setminus M)| \geq (|M| - n + s) + |E \setminus M| = (|M| - n + s) + (|E| - |M|) = |E| - n + s$ elde edilir. □

Ryser Teoremi'nin İkinci Kanıtı

R, Ryser Teoremi'nin koşullarını sağlayan bir latin dikdörtgen olsun. A_j, R'nin j-inci sırasında yer almayan, M de R'de tam tamına $r + s - n$ kez yer alan simgeler kümesi olsun. Önce, $A_1, ..., A_r$ ve M kümelerinin Hoffman-Kuhn Teoremi'nin (i) ve (ii) koşullarını yerine getirdiğini gösterelim:

(i)'in Kanıtı: Her k (= 1, 2, ..., r) için $A_1, ..., A_r$'den k tanesini seçelim ve bunlara $A_1, ..., A_k$ diyelim. Bu kümelerin her biri $n - s$ tane eleman içerdiğinden $|A_1| + ... + |A_k| = k(n - s)$'dir.

$R(i) \geq r + s - n$ koşulundan dolayı, her simge R'nin en az $r + s - n$ sırasında yer alır. Bu da her simgenin $A_1, ..., A_r$ kümelerinin en fazla $r - (r + s - n) = n - s$ tanesinde yer aldığını gösterir. Dolayısıyla, eğer $|A_1 \cup ... \cup A_k| = t$ ise,

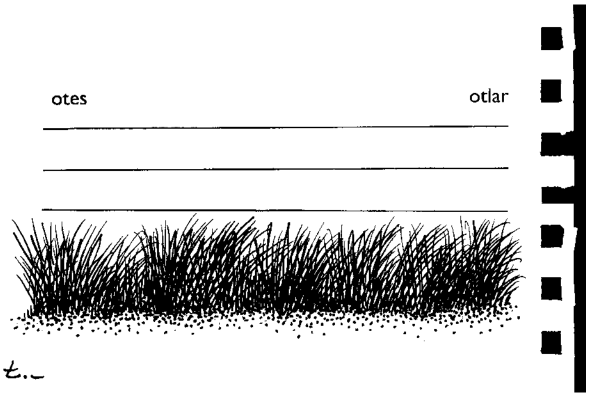
$$t(n - s) \geq |A_1| + ... + |A_k| = k(n - s),$$

yani $t \geq k$ olur. P. Hall Teoremi'ne göre, $A_1, ..., A_r$ kümelerine ait bir FTS vardır.

(ii)'nin Kanıtı: N, M'nin herhangi bir altkümesi olsun. Gerekirse A_i kümelerini yeniden sıralandırarak, $A_1, ..., A_k$ kümelerinin N ile kesişiminin boş olmadığını ve diğerleriyle N ile kesişiminin boş olduğunu varsayabiliriz.

N'deki her eleman $A_1, ..., A_r$ kümelerinden tam tamına $r - (r + s - n) = n - s$ tanesinde yer aldığından, $|N|(n - s) \leq |A_1 \cup ... \cup A_k| = k(n - s)$'dir. Dolayısıyla $|N| \leq k$. Böylece (ii) de kanıtlanmış oldu.

Demek ki Hoffman-Kuhn Teoremi'ne göre, $A_1, ..., A_r$ kümelerine ait bir FTS vardır. Bu FTS'yi R'ye yeni bir sütun olarak ekleyelim. Bu işlemi yineleyerek, R'yi $r \times n$ boyutlu bir latin dikdörtgene gömebiliriz. Şimdi, M. Hall Teoremi'ni kullanarak bu latin dikdörtgene $n - r$ sıra ekleyip $n \times n$ boyutlu bir latin kare elde edebiliriz. ♣



Sibel Özkan

1978 Alanya doğumluyum. İlk ve ortaokulu İstanbul'da, liseyi Edirne'de okudum. 1997'de Boğaziçi Üniversitesi Matematik Öğretmenliği'ni kazandım ve bu beni matematik öğretmeni olma hayalime biraz daha yaklaştırdı. Fakat birinci sınıf matematik derslerinin etkisiyle (ya da rahatın batmasıyla) matematikle akademik düzeyde ilgilenme kararı alıp Matematik Bölümü'ne geçtim. 2003 başında mezun olup aynı yılın Ağustos'unda Auburn Üniversitesi'nde doktoraya başladım. Çizgeler, tasarımlar ve kodlarla ilgileniyorum.

Kitap okumak dışında en büyük zevkim tenis oynamak. Haftada 3-4 gün oynamaya ve turnuva bulursam kaçırmamaya gayret ederim (ve hâlâ daha Wimbledon'a çağırılmadım!) Her türlü dansla, özellikle halk oyunlarıyla ilgilenirim. Ortaokulda horon dalında İstanbul birincisi bir ekipte yer almıştım. Auburn'de de doktora öğrencilerinden kurulu amatör bir halk oyunları ekibinde oynuyor, koreografi ve müzik seçimlerinde yardımcı oluyorum. Ayrıca, Auburn Türk Öğrenci Derneği başkan yardımcılığını yapmaktayım. ♣