Akdeniz Üniversitesi

IX. ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI

Birinci Seçme Sınavı

İlham Aliyev, Mustafa Özdemir, Mutlu Güloğlu, Ramazan Tınaztepe
ialiev@akdeniz.edu.tr / mozdemir@akdeniz.edu.tr / guloglu@akdeniz.edu.tr / rtinaztepe@akdeniz.edu.tr

Dokuzuncu Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatları'nın ilk aşama sınavı 23 Nisan'da yapıldı. Düzenleme Akdeniz Üniversitesi Sağlık, Kültür Dairesi Başkanlığı'yla bu daireye bağlı Matematik Kulübü, soruların hazırlanma ve değerlendirilmesi ise Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü tarafından yapılmaktadır. Lise 1 ve 2 öğrencilerinden yaklaşık 650 kişinin katıldığı bu yılki ilk aşama sorularını ve yanıtlarını veriyoruz.

Soru 1. *a, b ve c sayıları $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri ise,*

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$$

toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) –1

Çözüm: a, b ve c sayıları $P(x) = x^3 - x - 1$ polinomunun kökleri olduğundan, a+1, b+1 ve c+1 sayıları

$$\begin{aligned} P(x-1) &= (x-1)^3 - (x-1) - 1 \\ &= x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

polinomunun kökleridir. O halde

$$\frac{1}{a+1}, \frac{1}{b+1} \text{ ve } \frac{1}{c+1}$$

sayıları $1 - 3x + 2x^2 - x^3 = 0$, yani $x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ denklemini sağlarlar. Vieta teoreminden,

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = -(-2) = 2$$

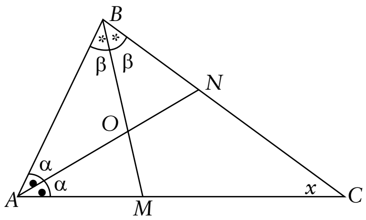
bulunur.

Soru 2. *x_1 ve x_2 sayıları $[x^2] = [6-x] - \{x - 111\}$ denkleminin kökleriyse, $x_1^3 + x_2^3$ sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir? ($[a]$ ifadesi, a sayısının tam kısmı olup, $\{a\} = a - [a]$'dır.)*

A) –7 B) 9 C) –9 D) –19 E) 35

Çözüm: $\{x - 111\} = [6 - x] - [x^2]$ eşitliğinden $\{x - 111\}$'in tamsayı, yani sıfır olması gerektiği çıkar. Bu durumda $x - 111$ ve dolayısıyla x tamsayıdır. Buna göre denklem, $x^2 + x - 6 = 0$ şeklinde yazılabilir. Buradan, $x_1 = -3$ ve $x_2 = 2$ olur. O halde, $x_1^3 + x_2^3 = -27 + 8 = -19$ bulunur.

Soru 3. *ABC üçgeninde, A ve B açılarının açıortayları AN ve BM'nin kesişim noktası O olsun. $OMCN$ dörtgeni kirişler dörtgeni olduğuna göre, BMN açısı kaç derecedir?*



A) 36 B) 30 C) 45 D) 22,5 E) 54

Çözüm: C açısı x derece olsun. Şekilden, $x + 2(\alpha + \beta) = 180°$. Ayrıca, O, M, C ve N noktaları çember üzerinde olduğundan, $(180° - (\alpha + \beta)) + x = m(AOB) + x = m(NOM) + x = 180°$ dir. Bu iki eşitlikten $x = 60°$ çıkar. O halde, aynı yayı gördüklerinden ve OC, C açısının açıortayı olduğundan, $m(BMN) = m(OCN) = x/2 = 30°$ bulunur.

Soru 4. *m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, $(m+n)^3 = (m^2+n)(m+n^2)$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n) ikilisi vardır?*

A) 4 B) 6 C) 2 D) 10 E) 8

Çözüm: Verilenden $3m^2n + 3mn^2 = m^2n^2 + mn$ çıkar. Bunu $3mn(m + n) = mn(mn + 1)$ şeklinde yazalım. Bundan, $mn > 0$ olduğundan, $3(m + n) = mn + 1$, yani $(m - 3)(n - 3) = 8$ çıkar. Buradan, $m < n$ için, $\{m - 3 = 1, n - 3 = 8\}$ ve $\{m - 3 = 2, n - 3 = 4\}$ olacağından, $(m, n) = (4, 11)$ veya $(m, n) = (5, 7)$ elde edilir. Denklem simetrik olduğundan, (11, 4) ve (7, 5)'de birer çözümdür. Dolayısıyla, denklemi sağlayan 4 tane (m, n) ikilisi vardır.

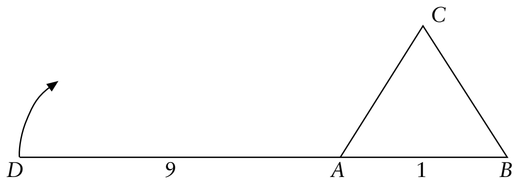
Soru 5. *60^{50}'nin böleni olup, 50^{60}'nın böleni olmayan pozitif sayıların sayısı n olsun. n sayısının*

50'*ye bölümünden kalan kaçtır*?

A) 40 B) 32 C) 35 D) 30 E) 48

Çözüm: $60^{50} = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^{50} = 2^{100} \cdot 3^{50} \cdot 5^{50}$ sayısının pozitif bölenlerinin sayısı $101 \cdot 51 \cdot 51 = 101 \cdot 51^2$'dir. Bu sayıdan 60^{50} ve 50^{60}'ın ortak pozitif bölenlerinin sayısını çıkarırsak n sayısını elde ederiz. $50^{60} = (2 \cdot 5^2)^{60} = 2^{60} \cdot 5^{120}$ olduğundan dolayı, obeb$(60^{50}, 50^{60}) = 2^{60} \cdot 5^{50}$ bulunur. Buradan, 60^{50} ve 50^{60} sayılarının pozitif ortak bölenlerinin sayısının $61 \cdot 51$ olduğu görülür. O halde, $n = 101 \cdot 51^2 - 61 \cdot 51$. Böylece, n sayısının 50'ye bölümünden kalan, $(1 - 11) = -10 \equiv 40$ olur.

Soru 6. *Şekildeki ABC eşkenar üçgeni, dik prizma şeklindeki bir köpek kulübesinin üstten görünüşüdür. D, A ve B noktaları doğrusal olup, AD ipinin uzunluğu 9 metre ve AB bir kenar uzunluğu 1 metredir. D noktasında AD ipine bağlanmış bir*



köpek saat yönünde koşmaya başlıyor. İp, her an gergin olmak koşuluyla, kulübeye tamamen dolandığında, köpek toplam kaç metre koşmuş olur?

A) 27π B) 28π C) 30π D) 32π E) 33π

Çözüm: Köpek, 9, 8, 7, ..., 2, 1 yarıçaplı çemberlerin 120 derecelik yayları kadar, yani uygun çember uzunluğunun 1/3'ü kadar yol gittiğinden, toplam yol uzunluğu, $2\pi(9 + 8 + ... + 2 + 1)/3 = 30\pi$ (metre) olarak bulunur.

Soru 7. 3×3 *karelik bir tahtanın her karesine bir tamsayı yazılıyor. Her satır ve her sütunun sayıların çarpımı* 7 *veya* -7*'ye eşit olan yazılışlara "iyi yazılış" diyelim. Kaç farklı "iyi yazılış" vardır?*

A) 1152 B) 1536 C) 3072 D) 3600 E) 2510

Çözüm: Her satırda ve her sütunda sadece bir tane 7 veya -7 olmalı ve boş kalan karelere 1 veya -1 yazılmalıdır. 7 sayısını tahtaya 3! yani 6 değişik şekilde yerleştirebiliriz. Kalan boş karelere de 1 yazarız. Bunun yanında dokuz karenin her birindeki sayıların eksi yada artı olması durumunu gözönüne alacak olursak, bu 2^9 farklı yazılışı verir. Sonuç olarak, "iyi yazılışların" toplam sayısı $2^9 \cdot 3! = 3072$ olur.

Soru 8. *Düzlemde* 10 *nokta verilmiştir. Köşeleri bu noktalar olan üçgen sayısı* 118 *olduğuna göre, bu noktaların en az ikisinden geçen kaç doğru vardır?*

A) 55 B) 45 C) 41 D) 36 E) 43

Çözüm: Doğrusal olmayan üç nokta olmasaydı, çizilebilecek üçgen sayısı,

$$\binom{10}{3} = 120$$

ve çizilebilecek doğru sayısı,

$$\binom{10}{2} = 45$$

olurdu. Ama çizilebilecek üçgen sayısı 118 olduğundan, en az 2 nokta üçlüsü üçgen belirlemez. Yani bu iki üçlünün her ikisi de doğrusaldır. Doğrusal iki tane üçlü olduğuna göre, 45'ten fazla saymış olduğumuz doğruların sayısını, yani, 2 + 2 = 4'ü çıkarırsak istenen doğru sayısını elde ederiz.

Soru 9.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x^2-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

olmak üzere, $f(1) + f(2) + ... + f(124) + f(125) = S$ *ise* $2S - 4$ *kaçtır?*

A) $\sqrt[3]{123}$ B) $\sqrt[3]{125}$ C) $\sqrt[3]{124}$ D) $\sqrt[3]{127}$ E) $\sqrt[3]{126}$

Çözüm: $f(x)$ fonksiyonunu,

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$$

ile çarparsak,

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{(x+1)^3} - \sqrt[3]{(x-1)^3}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}\right)$$

bulunur. O halde, $S = f(1) + f(2) + ... + f(125)$ sayısı,

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{0} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + ... + \sqrt[3]{126} - \sqrt[3]{124}\right]$$

sayısına eşittir. Bu eşitlik sadeleştirildiğinde,

$$S = \frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{126} - \sqrt[3]{1}\right] = \frac{1}{2}\left[4 + \sqrt[3]{126}\right]$$

bulunur. Böylece,

$$2S - 4 = \sqrt[3]{126}$$

elde edilir.

Soru 10. *f ve g fonksiyonları her $x, y \in \mathbb{R}$ için,*

$$2f(x) + g(x) + 3f(\sqrt[3]{y}) - g(\sqrt[3]{y}) = \sqrt[3]{y^2} + 3\sqrt[3]{x}$$

eşitliğini sağlamaktadır. $f(8)$ *kaçtır?*

A) 12 B) 13 C) 10 D) 14 E) 15

Çözüm: Eşitlikte, $y = x^3$ yazılırsa,

$$5f(x) = x^2 + 3\sqrt[3]{x} + 5$$

olur. Buradan, $f(8) = 15$ bulunur.

Soru 11. $x^7 + 5x - 3 = 0$ *denkleminin yedi kökü olduğu biliniyor. Bu köklerin yedinci kuvvetlerinin toplamı kaçtır?*

A) 21 B) 28 C) 35 D) 42 E) 49

Çözüm: Denklemin kökleri, $x_1, x_2, ..., x_7$ olsun. Bunları eşitliğinde yerine yazıp, taraf tarafa toplarsak,

$$x_1^7 + x_2^7 + ... + x_7^7 = -5(x_1 + x_2 + ... + x_7) + 3 \cdot 7$$

bulunur. Vieta teoreminden, $x_1 + x_2 + ... + x_7 = 0$ olduğundan, $x_1^7 + x_2^7 + ... + x_7^7 = 21$ elde edilir.

Soru 12. $S = \{1, 2, 3, ... \}$ *sayma sayılar kümesi olmak üzere,* $f : S \to S$ *fonksiyonu veriliyor.* $f(1) = 1$ *ve her* n *için* $f(1) + f(2) + ... + f(n)$ *toplamı,* n*'den büyük olmayan bir doğal sayının küpü olduğuna göre,* $f(5)$*'in 7'ye bölümünden kalan kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $f(1) < f(1) + f(2) < f(1) + f(2) + f(3) < ... < f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n)$ eşitsizlikler zincirinde tam n tane farklı doğal sayı vardır ve herbiri n'yi aşmayan bir doğal sayının küpü olduğundan, $f(1) = 1^3$, $f(1) + f(2) = 2^3, ..., f(1) + f(2) + ... + f(n) = n^3$ olmak zorundadır. O halde,

$$f(n) = (f(1) + f(2) + ... + f(n)) - (f(1) + ... + f(n-1)$$
$$= n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

bulunur. Böylece,

$$f(5) = 75 - 15 + 1 = 61 \equiv 5 \pmod 7$$

olur.

Soru 13. 8×8 *karelik bir satranç tahtasında, bu karelerle oluşturulan ve alanı çift sayı olan kaç dikdörtgen vardır? (Bir karenin alanı 1 br²'dir).*

A) 400 B) 512 C) 648 D) 896 E) 972

Çözüm: Alanı çift olan dikdörtgenlerin sayısını, tüm dikdörtgenlerin sayısından tek alana sahip dikdörtgenlerin sayısını çıkararak elde edebiliriz. Tüm dikdörtgenlerin sayısı

$$\binom{9}{2}\binom{9}{2}$$

dir. Alanın tek sayı olabilmesi için, kenarların tek sayı olması gerektiğinden, tüm tek sayı alanlı dikdörtgenlerin sayısını bulabilmek için, tüm tek sayı uzunluğa sahip yatay ve dikey uzunlukların sayısını belirlememiz gerekir. Tüm tek alanlı dikdörgenlerin sayısı, tek dikey ile tek yatay uzunlukların sayısının çarpımına eşittir.

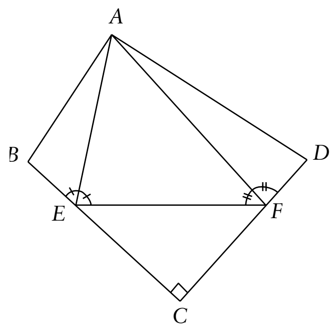
Uzunluğu tek sayı olan tüm yatay uzunluklar 1,3,5 ve 7 br olan uzunluklardır. Tahta üzerinde, uzunluğu 1 br olan 8, uzunluğu 3 br olan 6, uzunluğu 5 br olan 4 ve uzunluğu 7 br olan 2 tane yatay uzunluk olduğundan, uzunluğu tek olan yatay uzunlukların sayısı $8 + 6 + 4 + 2 = 20$'dir. Uzunluğu tek olan dikey uzunlukların sayısı, uzunluğu tek olan yatay uzunlukların sayısına eşit olduğundan dolayı, tek alanlı dikdörtgenlerin sayısı $20 \times 20 = 400$'dür.

O halde, alanı çift sayı olan dikdörtgenlerin sayısı,

$$\binom{9}{2}\binom{9}{2} - 400 = 1296 - 400 = 896$$

olarak bulunur.

Soru 14. *Yandaki şekilde ABCD kirişler dörtgeni,* $m(AEB) = m(AEF)$, $m(AFE) = m(AFD)$ *ve* $m(ECF) = 90°$*'dir. Bu dörtgende* $BC = CD$, $BE = 2$ *birim ve* $CF = 2{,}5$ *birim olduğuna göre, BC kaç birimdir?*



A) 5/2 B) 10/3 C) 17/6 D) 3 E) 15/4

Çözüm: B'nin AE'ye göre simetriğine B' ve D'nin AF'ye göre simetriğine D' diyelim. $ABCD$ kirişler dörtgeni olduğundan $m(ABC) + m(ADC) = 180°$ dir. Bundan dolayı, B' ve D' çakışır. Dolayısıyla $EF = BE + DF$ olur. Öte yandan, $BC = CD = x$ dersek, $DF = x - 2{,}5$, $EC = x - 2$ olur. $EF = BE + DF$ eşitliğinden, $EF = x - 2{,}5 + 2 = x - 0{,}5$ olur. ECF üçgenine Pisagor Teoremi'ni uygularsak, $EF^2 = EC^2 + CF^2$ eşitliğinden $(x - 0{,}5)^2 = (x - 2)^2 + 2{,}5^2$ ve böylece $x = 10/3$ bulunur.

Soru 15. 2004 *basamaklı bir sayının komşu herhangi iki rakamının oluşturduğu sayı,* <u>*üç farklı*</u> *asal sayının çarpımı olarak yazılabilmektedir. Bu sayının son basamağı kaçtır?*

A) 0 B) 2 C) 5 D) 4 E) 6

Çözüm: Bu sayının komşu iki rakamının oluşturduğu sayı, üç farklı asal sayının çarpımı şeklinde yazılabildiğine göre, komşu iki rakamın oluşturduğu sayı,

$$2 \times 3 \times 5 = 30$$
$$2 \times 3 \times 7 = 42$$

$2 \times 3 \times 11 = 66$

$2 \times 5 \times 7 = 70$

sayılarından biri olabilir. Bu durum, komşu olan herhangi iki rakam için geçerli olduğundan, bu koşulu sadece 66 sağlar. Dolayısıyla 2004 basamaklı sayımızın tüm rakamları 6'dır.

Soru 16. *n pozitif bir tamsayı ve p tamsayı olmayan bir rasyonel sayı olduğuna göre,*

$$p^2 = \frac{(2n)!}{2000}$$

eşitliğini sağlayan kaç pozitif p sayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz

Çözüm:

$$p^2 = \frac{(2n)!}{2^4 \times 5^3}$$

eşitliğini gözlemleyelim. Dikkat edilmesi gereken nokta, p'nin tamsayı olmayan bir rasyonel sayı olmasıdır. Buna göre, $(2n)!$ sayısının 3 tane 5 çarpanı bulunması durumunda p tamsayı olur ve koşul sağlanmaz. Ayrıca, sağ tarafın bir tamkare olabilmesi için, sadece bir tane 5'in sadeleşmesi gerekir. Yani paydada, 5^2 olmalıdır. Dolayısıyla, $5 < 2n < 9$ sağlanmalıdır. Böylece, $3 \le n \le 4$ olur. $n = 4$ için 8! sayısının içindeki 7 çarpanı tamkareliği bozacağından, geriye $n = 3$ durumu kalır. Böylece, $n = 3$ yazılırsa, $p = 3/5$ bulunur. O halde, eşitliği sağlayan sadece bir tek pozitif p sayısı vardır.

Soru 17. *$a_1, a_2, ..., a_{100}$ tamsayıları için*

$$a_1 + a_2 + ... + a_{100} = 1001^{1001}$$

eşitliği sağlandığına göre,

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_{100}^3$$

sayısının 6'ya bölümünden kalan kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Her x tamsayısı için,

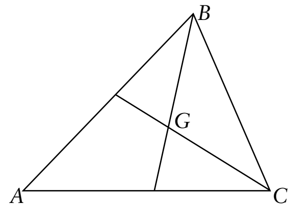
$$x^3 - x = x(x-1)(x+1)$$

(üç ardışık sayının çarpımı) eşitliğinden, $x^3 \equiv x \pmod 6$ çıkar. Buna göre, $a_1{}^3 + a_2{}^3 + ... + a_{100}{}^3 \equiv a_1 + a_2 + ... + a_{100} = 1001^{1001} \equiv 5^{1001} \equiv (-1)^{1001} = -1 \equiv 5 \pmod 6$ bulunur.

Soru 18. *İki kenarortayından birinin uzunluğu 6 br, diğerinin uzunluğu 9 br olan bir üçgenin alanı en fazla kaç br^2 olabilir?*

A) 33 B) 32 C) 34 D) 36 E) 39

Çözüm: G, üçgenin kenarortaylarının kesişim noktası, yani üçgenin aşırlık merkezi olsun. Demek ki,



$|BG| = (2/3)\times 6 = 4$,

$|CG| = (2/3)\times 9 = 6$

dır. Bundan,

$$\text{Alan}(ABC) = 3\times\text{Alan}(GBC) \le 3\times|BG|\times|CG|/2 = 36$$

elde edilir. Eşitlik, $BG \perp CG$ halinde mümkündür.

Soru 19. *x, y ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, $1 < x/y < 2$ ve $2 < y/n < 3$ koşullarını sağlayan (x, y) ikililerinin sayısı 99 olduğuna göre, n kaçtır?*

A) 5 B) 7 C) 6 D) 9 E) 8

Çözüm: Verilen eşitsizliklerden, $2n < y < 3n$ ve $y < x < 2y$ çıkar. Demek ki y,

$$y \in \{2n + 1, 2n + 2, ..., 3n - 1\}$$

olacak şekilde $n - 1$ değer alır. Buradan alınan her y değeri için,

$$x \in \{y + 1, y + 2, ..., 2y - 1\}$$

olur ve x sayısı, $y - 1$ tane değer alabilir. Böylece, $y = 2n + 1$ için, x sayısı $2n$ tane farklı değer alır ve $2n$ tane (x, y) ikilisi elde edilir. Benzer şekilde, $y = 2n + 2$ için, x, $2n + 1$ tane farklı değer alır ve $2n + 1$ tane (x, y) ikilisi ortaya çıkar. Bu şekilde devam edecek olursak, (x, y) ikililerinin sayısı :

$$2n + (2n + 1) + ... + (3n - 2) = (5n - 2)(n - 1)/2$$

olur. $(5n - 2)(n - 1)/2 = 99$ eşitliğinden $n = 7$ bulunur.

Soru 20. *Hacmi 27 br^3 olan dikdörtgenler prizması şeklinde kapalı bir kutu yapılacak ve her yüzü farklı renklere boyanacaktır. Boyaların birimkareye düşen maliyetleri 1, 1, 2, 2, 3 ve 5 TL'dir. Toplam boyama maliyeti en düşük olacak şekilde bir kutu yapıldığında, bu kutunun boyama maliyeti kaç TL olur?*

A) 108 B) 126 C) 170 D) 96 E) 81

Çözüm: Bu kutunun ayrıtları x, y, z olsun. En düşük boyama maliyeti için, bu kutunun karşılıklı yüzlerinin, 3 ve 5, 2 ve 2, 1 ve 1 TL'lık boyalar ile boyanması gerekir. Dolayısıyla soru, "$(3+5)xy + (1+1)yz + (2+2)zx$ ifadesinin, $xyz = 27$ koşulu altındaki minimum değeri nedir?" anlamına gelir. Bunu, "AO ≥ GO" ortalamalar eşitsizliğini kullanarak çözebiliriz. Bu eşitsizlikten,

$$8xy + 4yz + 2zx \le 3\sqrt[3]{(xyz)^2}\,\sqrt[3]{8\times4\times2} = 3\times9\times4 = 108$$

bulunur. Ayrıca, $y = 1{,}5$, $x = 3$ ve $z = 6$ değerleri için eşitlik durumu elde edilir. ♦