Doğuş Üniversitesi Matematik Kulübü Matematik Yarışması 2003
Bireysel Yarışma Soru ve Çözümleri

Soru 1. $\dfrac{a+2b}{2a-b}=\dfrac{3}{2}$ *olduğuna göre,* $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$ *oranı nedir?*

Çözüm: $2a + 4b = 6a - 3b$ olduğundan, $7b = 4a$. Demek ki $a/b = 7/4$, dolayısıyla,

$$\frac{a^2-b^2}{ab}=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{7}{4}-\frac{4}{7}=\frac{33}{28}.$$

Soru 2. $2x + 4y + z = 29$ *ve* $y - x - 2z = 14$ *ise* $x + y + z$ *toplamı nedir?*

Çözüm: İkinci denklem -1'le çarpılıp ilkiyle toplandığında

$$2x+4y+z-(y-x-2z)=3(x+y+z)=29-4=15$$

elde edilir. Buradan da $x + y + z = 5$ çıkar.

Soru 3. $x + 1/x = 4$ *olduğuna göre,*

$$\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)\div\left(x-1+\frac{1}{x}\right)$$

ifadesi neye eşittir?

Çözüm:

$$x^2+1+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1=\left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right)$$
$$=(4+1)(4-1)=15$$

ve

$$x-1+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}-1=4-1=3$$

olduğundan, sonuç, $15/3 = 5$ bulunur.

Soru 4. x_1 *ve* x_2 *sayıları* $4x^2 - 5x - 3 = 0$ *denkleminin kökleriyse,* $x_1^3 + x_2^3$ *toplamı kaçtır?*

Çözüm: Verilen denklemde $x_1 + x_2 = 5/4$ ve $x_1x_2 = -3/4$ olacağından,

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)\\ &= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]\\ &= (5/4)[(5/4)^2 - 3(-3/4)] = 305/64. \end{aligned}$$

Soru 5. $2x + \sqrt{x} = 1$ *denkleminin çözüm kümesi nedir?*

Çözüm: $y = \sqrt{x}$ koyarsak, denklemimiz $2y^2 + y = 1$ halini alır, yani

$$0 = 2y^2 + y - 1 = (2y - 1)(y + 1),$$

dolayısıyla ya $y = 1/2$ ya da $y = -1$. Ama y negatif olamayacağından (çünkü bir kareköke eşit), $y = 1/2$ bulunur. Dolayısıyla $x = y^2 = 1/4$.

Soru 6. $\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}-\sqrt{3}=?$

Çözüm:

$$7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}-\sqrt{3}&=\sqrt{3+8\left(2+\sqrt{3}\right)}-\sqrt{3}\\ &=\sqrt{16+8\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{3}\\ &=4+\sqrt{3}-\sqrt{3}=4.\end{aligned}$$

Soru 7. $5x + 12y = 193$ *denkleminin bütün pozitif tamsayılı* (x, y) *çözümlerini bulunuz.*

Çözüm: Önce, $5 \times 39 = 195$ ve $12 \times 17 = 204$ eşitliklerinden, çözümlerin $0 \le x < 39$ ve $0 \le y < 17$ eşitsizliklerini sağlaması gerektiğini görelim.

Sonra, eğer (x_0, y_0) bir çözümse, o zaman her (x, y) çözümü için, $5x + 12y = 193 = 5x_0 + 12y_0$, dolayısıyla, $5(x - x_0) = 12(y_0 - y)$ eşitliğinin farkına varalım. Bu sayıya k adını verecek olursak, o zaman, $5(x - x_0) = 12(y_0 - y) = k$ ve,

$$x = k/5 + x_0 \text{ ve } y = y_0 - k/12$$

bulunur. x ve y tamsayı olduklarından k, 60 ve katları olmalıdır.

Şimdi, deneme yanılma yoluyla, ya da tüm $0 \le x < 39$ ve $0 \le y < 17$ olasılıklarını deneyerek herhangi bir (x_0, y_0) çözümü bulalım, diyelim $x_0 = 5$ ve $y_0 = 14$ çözümünü bulduk.

Tüm çözümleri bulmak için, yukardaki k'yi 60'ın katları olarak alalım:

$k = 60$ ise, $x = 17$ ve $y = 9$

$k = 120$ ise, $x = 29$ ve $y = 4$

Eğer $k < 0$ ya da $k > 120$ ise, x ve y pozitif olamazlar. Dolayısıyla üç çözüm vardır: (5, 14), (17, 9) ve (29, 4).

Soru 8. $x^2 - xy - 6y^2 + 7x - y + \lambda$ *ifadesi, birinci dereceden iki polinomun çarpımı olarak yazılabildiğine göre,* λ *sabit sayısı kaçtır?*

Çözüm: Diyelim ki,

$$x^2 - xy - 6y^2 + 7x - y + \lambda$$
$$= (ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1).$$

Demek ki $aa_1 = 1$, dolayısıyla a ve a_1, 0 olamazlar. bunu aklımızda tutalım. Amacımız λ'ya eşit olan cc_1'i bulmak.

$$x^2 - xy - 6y^2 + 7x - y + \lambda$$
$$= (x - 3y)(x + 2y) + 7x - y + \lambda$$

eşitliğini bulmak kolay. Demek ki

$$(x - 3y)(x + 2y) + 7x - y + \lambda$$
$$= (ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1). \quad (1)$$

Bu eşitlikte önce $x = 3y$ alalım: Sol tarafta $20y + \lambda$ buluruz, sağ taraftaysa

$$((3a + b)y + c)((3a_1 + b_1)y + c_1).$$

Demek ki,

$$20y + \lambda = ((3a + b)y + c)((3a_1 + b_1)y + c_1).$$

Sağdaki y^2'nin katsayısı olan $(3a + b)(3a_1 + b_1)$, 0 olmalı. Herhangi bir genellik kaybetmeden, $3a_1 + b_1 = 0$ eşitliğini varsayabiliriz. Gene aynı eşitlikten,

$$(3a + b)c_1 = 20 \quad (2)$$

çıkar.

Bu sefer, (1) eşitliğinde $x = -2y$ alalım. Aynen biraz önceki gibi düşünerek, $b = 2a$ ve $a_1c = 3$ buluruz. Şimdi, $b = 2a$ eşitliği ve (2), $ac_1 = 4$ verir. Demek ki $12 = 3 \times 4 = (a_1c)(ac_1) = (aa_1)(cc_1) = cc_1$.

Soru 9. $\left(\sqrt{2}x + \sqrt[4]{3}\right)^{100}$ *polinomunun açılımında kaç kesirli terim vardır?*

Çözüm: Önce

$$\left(\sqrt{2}x + \sqrt[4]{3}\right)^{100} = \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\left(\sqrt{2}x\right)^k\left(\sqrt[4]{3}\right)^{100-k}$$
$$= \left(\sqrt[4]{3}\right)^{100}\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\right)^k$$
$$= 3^{25}\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\left(\frac{4}{3}\right)^{k/4}x^k$$

eşitliklerinin farkına varalım. Bu ifadenin içindeki $(4/3)^{k/4}$ sayısını kesirli yapacak k değerleri, 0 ile 100 arasındaki 4'e bölünen sayılardır. Demek ki 26 terim kesirlidir.

Soru 10. *Aşağıdaki sistemin bütün* (x, y) *çözümlerini bulunuz.*

$$y^{\left(x^2 - 8x + 15\right)} = 1$$
$$x + y = 8$$

Çözüm: Eğer $y \neq 1, -1$ ise, birinci denklemden $x^2 - 8x + 15 = 0$ çıkar, bundan da $x_1 = 3$, $x_2 = 5$ bulunur ve bunlara sırasıyla $y_1 = 5$ ve $y_2 = 3$ çözümleri tekabül eder.

Eğer $y = 1$ ise elbette $x = 7$, ve $y = -1$ ise $x = 9$ sistemin çözümleridir.

O halde (3, 5), (5, 3), (7, 1) ve (9, −1) aranan çözümlerdir.

Soru 11. $x > 0$ *olmak üzere,* $x^y = y^x$ *ve* $y = 5x$ *denklem sisteminin çözüm kümesi nedir?*

Çözüm: İkinci denklemdeki $y = 5x$ birinci denklemde yerine konulduğunda, $x^{5x} = (5x)^x = 5^x x^x$, buradan da $x^{4x} = 5^x$ bulunur. Her iki tarafın da $4x$-inci kökü alındığında, $x = 5^{1/4}$ bulunur.

Soru 12. $(m - 3)x^2 - 2x + m + 1 = 0$ *denkleminin ters işaretli iki gerçel kökü olması için* m*'nin alabileceği değerler hangi aralıkta bulunur?*

Çözüm: $(m+1)/(m-3) < 0$ olmalı. Buradan da $-1 < m < 3$ bulunur.

Soru 13. *Bir* $P(x)$ *polinomunun* $x^2 - 1$ *ile bölümünden kalan* $3x + 2$*'dir. Bu polinomdan*

$$Q(x) = P(2x - 1) + P(2 - x)$$

polinomu oluşturuluyor. $Q(x)$*'in katsayılarının toplamı kaçtır?*

Çözüm: Bir $R(x)$ polinomu için,

$$P(x) = (x^2 - 1)R(x) + 3x + 2$$

olacağından, $P(x)$ polinomunun katsayıları toplamı $P(1) = 5$'tir. $Q(1) = P(1) + P(1) = 2P(1)$ olduğundan $Q(x)$'in katsayıları toplamı $2P(1) = 10$ olur.

Soru 14. $||x + 2| - 2| < 2$ *eşitsizliğinde* x*'in alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?*

Çözüm: $||x + 2| - 2| < 2$ eşitsizliğinden,

$$-2 < |x + 2| - 2 < 2$$

çıkar, yani $0 < |x + 2| < 4$. Dolayısıyla $-4 < x + 2 < 4$ ve $x \neq -2$ bulunur. Demek ki $-6 < x < 2$ ve $x \neq -2$. Yanıt: $x = -5, -4, -3, -1, 0, 1$.

Soru 15. *Pozitif gerçel sayılar üzerinde* $\otimes$ *işlemi,*

$$x \otimes y = x/y + y/x - 2$$

olarak tanımlanıyor. Buna göre $(a + 1) \otimes a = 1/6$ *ise a kaçtır?*

Çözüm:

$$\frac{1}{6} = (a+1)\otimes a = \frac{a+1}{a} + \frac{a}{a+1} - 2 = \frac{2a^2 + 2a + 1}{a^2 + a} - 2$$

eşitliğinin paydaları eşitlendiğinde elde edilen ikinci dereceden polinom çözüldüğünde, $a = 2$ ve $a = -3$

bulunur. Pozitif çözümler arandığından $a = 2$ olur.

Soru 16. $(7p + 36)^{1/2}$ *sayısının bir tamsayı olmasını sağlayan en büyük* p *asal sayısı nedir?*

Çözüm:

$$\sqrt{7p+36} = k$$

olsun. O zaman, $7p = k^2 - 36 = (k-6)(k+6)$. Her tamsayının tek bir biçimde asallarına ayrıldığını düşünürsek, sonuca oldukça yaklaşırız.

$k - 6$, 1'e eşit olursa, $k = 7$ bulunur ve o zaman $7p = 13$ çıkar, ki bu imkânsızdır.

k pozitif olduğundan, elbette $k + 6$ da 1'e eşit olamaz.

Demek ki $k - 6 = 7$ ya da $k + 6 = 7$. Birinci seçenek bize $k = 13$ ve $p = 19$ çözümünü verir. İkinci seçenekte $k = 1$ bulunur ki bu da $7p = -35$, yani $p = -5$ verir. Demek ki çözümü sağlayan en büyük asal sayı 19'dur.

Soru 17. *Bir sayının* 2004*'e bölümünden elde edilen kalan* 43 *olduğuna göre, aynı sayının* 12*'ye bölümünden elde edilen kalan kaçtır?*

Çözüm: Sayımız A olsun.

$$A = 2004k + 43 = 12 \times 167k + 43$$
$$= 12(167k + 3) + 7$$

eşitliğinden, A'nın 12'ye bölümünde kalanın 7 olduğu anlaşılır.

Soru 18. *Ardışık dört sayının çarpımı* 3024 *ise bu sayıların toplamı kaçtır?*

Çözüm: 3024'ün son rakamı 0 olmadığından bu dört sayıdan hiçbiri 5'in bir katı olamaz. Ayrıca, $7^4 = 2401$ ve $8^4 = 4096$ olduğundan, verilen sayının 1/4'üncü kuvveti 7'yle 8 arasındadır. Bunlardan, istenilen sayıların 6, 7, 8 ve 9 olduğu çıkar. Yanıt $6 + 7 + 8 + 9 = 30$'dur.

Soru 19. a, b *ve* c *pozitif tamsayılardır.*

$$\text{obeb}(a, b) = 5$$
$$\text{obeb}(b, c) = 2$$
$$\text{obeb}(c, a) = 3$$
$$\text{okek}(a, b) = 900$$
$$\text{okek}(b, c) = 2100$$
$$\text{okek}(c, a) = 630$$

olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm:

$$ab = \text{obeb}(a, b)\text{okek}(a, b) = 5\times 900 = 4500,$$
$$ac = \text{obeb}(a, c)\text{okek}(a, c) = 3\times 630 = 1890,$$
$$bc = \text{obeb}(b, c)\text{okek}(b, c) = 2\times 2100 = 4200$$

olduğundan,

$$a^2 = (ab)(ac)/(bc) = 4500\times 1890/4200$$
$$= 270 \times 15 = 2025,$$

yani $a = \sqrt{2025} = 45$.

Soru 20. *Birler basamağındaki rakamı* 6 *olan altı basamaklı bir sayının birler basamağındaki rakamı en soldaki basamağa alındığında elde edilen yeni sayı ilk sayının dört katı olmaktadır. İlk sayı kaçtır?*

Çözüm: İlk sayıyı $abcde6$ olarak alalım.

$$\begin{array}{r} abcde6 \\ \times \quad\quad 4 \\ \hline 6abcde \end{array}$$

işlemini yaparak, sağdan itibaren rakamlar teker teker kolaylıkla bulunur. Yanıt 153846'dır.

Soru 21. $100! = 6^n a$ *eşitliğinde* a*'nın bir tamsayı olduğu bilindiğine göre,* n *sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?*

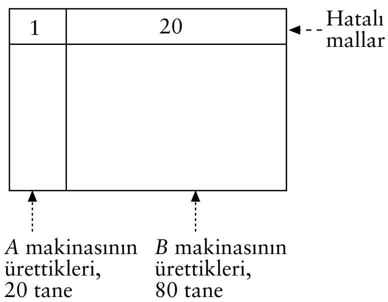
Çözüm: $[100/2] + [100/4] + [100/8] + ... = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$ olduğundan, bir b tek tamsayısı için, $100! = 2^{97}b$ olarak yazılır. Benzer biçimde, 3'e bölünmeyen bir c tamsayısı için, $100! = 3^{48}c$ eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla $n = 48$ olmalıdır.

Soru 22. 1, 2, 3, .., 50 *sayılarından rastgele bir sayı seçiliyor. Seçilen sayının* 6 *veya* 8*'e bölünebilme olasılığı kaçtır?*

Çözüm: 1, 2, 3, ..., 50 sayılarından 6'ya bölünenlerden 8 tane ve 8'e bölünenlerden 6 tane vardır. 24 ve 48, hem 6'ya hem de 8'e bölündüğünden, 6 veya 8'e bölünenlerin sayısı $6 + 8 - 2 = 12$'dır. Demek ki olasılık 12/50'dir.

Soru 23. *Bir atölyede üretilen malların* %20*'si* A, %80*'i de* B *makinasında üretilmektedir.* A *makinası* %5, B *makinası ise* %25 *hatalı üretim yapmaktadır. Rastgele seçilen bir malın hatalı olduğu bilindiğine göre,* A *makinası tarafından üretilmiş olma olasılığı kaçtır?*

Çözüm: Toplam 100 mal üretildiğini varsayalım. Yandaki şekilden izleyin. Bunların 20'sini A, 80'ini B makinası üretmiştir. A makinasının ürettiklerinin %5'i (yani 20'de 1'i) hatalı olduğundan, A ma-



kinasının ürettiği 20 maldan biri hatalıdır. B makinasının ürettiklerinin %25'i (yani 4'te 1'i) hatalı olduğundan, B makinasının ürettiği 80 maldan 20'si hatalıdır. Demek ki üretilen toplam 21 hatalı malın 1 tanesi A makinası tarafından üretilmiştir. Yanıt 1/21'dir.

Soru 24. *$x > y > 0$ olacak biçimde öyle iki pozitif sayı bulunuz ki, farkları, çarpımları ve kareleri farkı sırasıyla 1, 12 ve 7 sayılarıyla orantılı olsun.*

Çözüm: $k = x - y = xy/12 = (x^2 - y^2)/7$ olsun. Demek ki,

$$x - y = k > 0$$
$$xy = 12k$$
$$x^2 - y^2 = 7k$$

Şimdi, $7k = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = k(x + y)$, yani $x + y = 7$. Bunu ve birinci eşitliği toplarsak, $2x = 7 + k$, çıkarma yaparak da $2y = 7 - k$ buluruz. Demek ki

$$48k = 4xy = (2x)(2y) = (7 + k)(7 - k) = 49 - k^2,$$

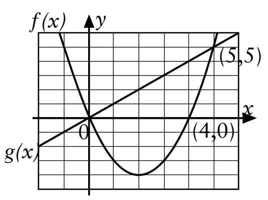
yani $k^2 + 48k - 49 = 0$. Bundan da $k = -49$ ya da $k = 1$ çıkar. Demek ki $k = 1$. Sonuç: $x = 4$ ve $y = 3$.

Soru 25. *x ve y, 7'ye bölünmeyen pozitif tamsayılar olmak üzere, $x^2 + x = 7y$ ise, x'in 7'ye bölümünden kalan kaçtır?*

Çözüm: Modülo 7 hesaplarsak,

$$x(x+1) = x^2 + x = 7y \equiv 0,$$

yani ya $x \equiv 0$ ya da $x \equiv -1 = 6$. Sonuç 6'dır.



Soru 26. *Yandaki şekilde bir parabol ve bir doğru verilmiştir.*

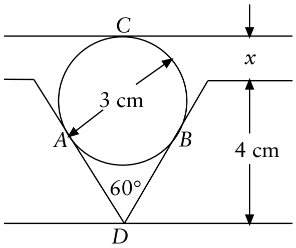
$$\frac{(f\circ g)(8)}{(f\circ f)(2)}$$

teriminin değeri kaçtır?

Çözüm: Verilen şekilden $g(x) = x$ ve $f(x) = x^2 - 4x$ bulunur. Böylece,

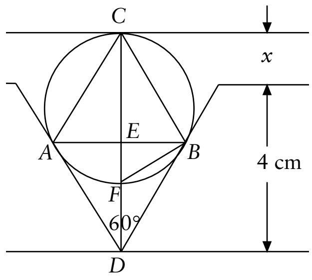
$$\frac{(f\circ g)(8)}{(f\circ f)(2)} = \frac{f(g(8))}{f(f(2))} = \frac{f(8)}{f(-4)} = \frac{32}{32} = 1$$

elde edilir.

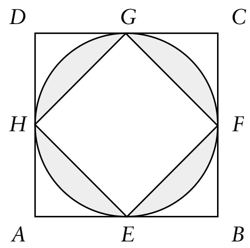


Soru 27. *Yandaki düzenekte yatay doğrular birbirine paralel ve A, B, C çembere teğet olan doğruların değme noktalarıdır. x uzunluğu kaç santimetredir?*

Çözüm: ABD üçgeni eşkenardır. Bundan, kolaylıkla, ACB üçgeninin de eşkenar olduğu çıkar. Önce, CFB diküçgeni kullanılarak CB'nin $3\sqrt{3}/2$ olduğu, ardından, CBE diküçgeni kullanılarak, EC'nin 9/4 olduğu bulunur. Demek ki $CD = 9/2$ ve $x = 9/2 - 4 = 1/2$.

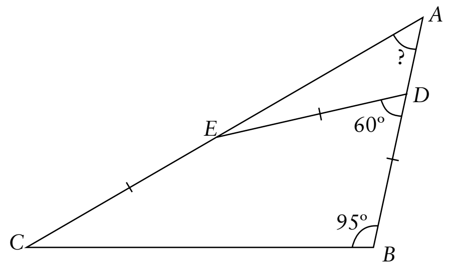


Soru 28. *Yandaki şekildeki çember, ABCD karesinin kenarlarına teğettir. AB = $2\sqrt{3}$ birim ise, taralı alan kaç birim karedir?*



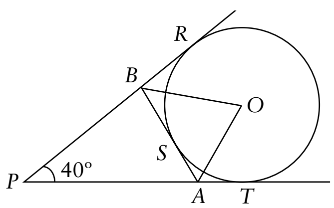
Çözüm: $AB = 2\sqrt{3}$'ten, $EB = \sqrt{3}$ ve bundan da $EF = \sqrt{6}$ bulunur. Demek ki $EFGH$ karesinin alanı 6'dır. Dairenin alanı da $\pi(\sqrt{3})^2 = 3\pi$ olduğundan, taralı bölgenin alanının $3\pi - 6$ olduğu görülür.

Soru 29. *Aşağıdaki ABC üçgeninde CE = ED = DB, m(CBA) = 95° ve m(EDB) = 60° olduğuna göre m(BAC) kaç derecedir?*



Çözüm: BDE üçgeni, bir açısı 60° olan bir ikizkenar olduğundan, eşkenardır, dolayısıyla BCE üçgeni ikizkenardır. Bundan da $m(ECB) = 95 - 60 = 35$ çıkar. Buradan CAB açısı bulunur: $180 - 35 - 95 = 50°$.

Soru 30. *PAB üçgeni O merkezli çembere üç teğet çizilerek oluşturuluyor. m(APB) = 40° ise m(AOB) kaç derecedir?*



Çözüm: $m(ABO) = m(OBR)$ ve $m(TAO) = m(OAB)$ olduğundan,

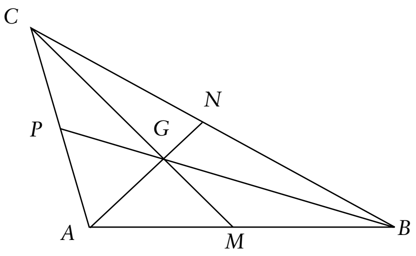
$$m(AOB) = 180 - m(ABO) - m(BAO)$$

$= 180 - (m(ABR) + m(BAT))/2$

$= 180 - ((180 - m(PBA)) + (180 - m(PAB))/2$

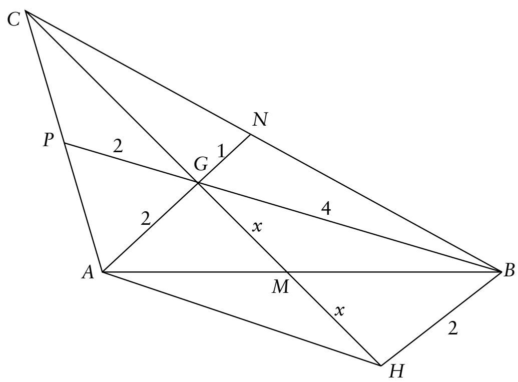
$= (m(PBA) + m(PAB))/2$

$= (180 - 40)/2 = 70°$.



Soru 31. *İkizkenar olmayan bir üçgenin kenar ortayları AN ve BP sırasıyla 3 ve 6 cm uzunluğundadır. Üçgenin alanı $3\sqrt{15}$ cm^2 olduğuna göre CM kenar ortay uzunluğu kaç cm'dir?*

Çözüm: Alan = taban × yükseklik/2 formülünden dolayı, *GCP*, *GPA*, *GAM*, *GMB*, *GBN* ve *GNC* üçgenlerinin alanları eşittir.



Kenarortaylar bir üçgende 1/3 oranında kesiştiklerinden, yukarda çizilen üçgendeki ölçüleri elde ederiz. $GM = x$ olsun. *CM* doğrusunu üçgenin dışına x birim uzatalım ve bu noktaya *H* diyelim.

Bir üçgenin kenarları *a*, *b* ve *c* ise ve *p* üçgenin çevresinin yarısıysa, yani $(a + b + c)/2$ ise, bilinen bir formüle göre, üçgenin alanı,

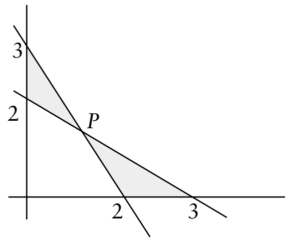
$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

dir. Demek ki,

$$\sqrt{15} = \frac{3\sqrt{15}}{3} = A(GHB) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$= \sqrt{(3+x)(3-x)(x+1)(x-1)},$$

yani, $15 = (9 - x^2)(x^2 - 1)$. Bundan da kolaylıkla $x = 2$ ya da $\sqrt{6}$ bulunur. Üçgen ikizkenar olmadığından $x = \sqrt{6}$ bulunur. Yanıt $3\sqrt{6}$'dır.

Soru 32. *Yandaki şekildeki taralı bölgenin alanı kaç birim karedir?*



Çözüm: (2, 0) ve (0, 3) noktalarından geçen doğrunun denklemi $3x + 2y = 6$'dır. (3, 0) ve (0, 2) noktalarından geçen doğrunun denklemi $2x + 3y = 6$'dır. Bu iki doğrunun kesişim noktasını bulmak için,

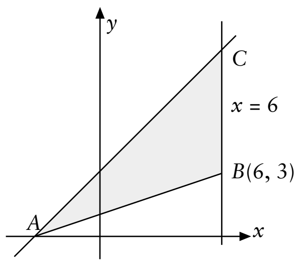
$$3x + 2y = 6$$
$$2x + 3y = 6$$

denklemlerini aynı anda çözmeliyiz. Kolaylıkla $x = 6/5$ ve $y = 6/5$ bulunur. Demek ki alan,

$$(6/5 \times 1)/2 + (6/5 \times 1)/2 = 6/5$$

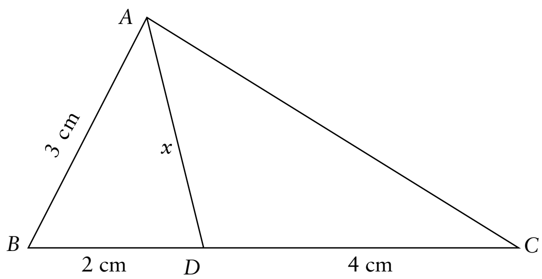
dir.

Soru 33. *Yandaki şekilde $y = x + 2$ ve $x = 6$ doğruları C noktasından geçmektedir. ABC üçgeninin alanı nedir?*



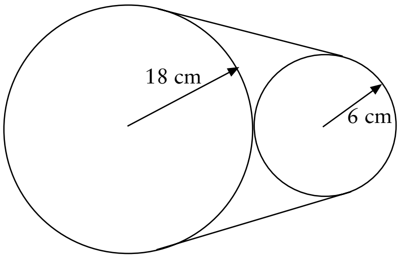
Çözüm: Kolaylıkla, *C* noktasının koordinatları (6, 8) ve *A* noktasının koordinatları (–2, 0) bulunur. $x = 6$ doğrusunun x eksenini kestiği noktaya *D* dersek, $|AD| = 8$ bulunur. Demek ki ABC üçgeninin alanı, $|AD| \times |BC|/2 = 20$'dir.

34) *Şekilde $m(BAD) = m(CAD)$, $AB = 3$ cm, $BD = 2$ cm, $DC = 4$ cm olarak veriliyor. AD kaç cm'dir?*

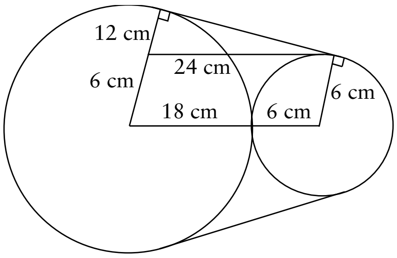


Çözüm: $AC/DC = AB/BD$ açıortay bağıntısından $AC = 6$ çıkar. $AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$ açıortay uzunluğu bağıntısından, $AD = \sqrt{10}$ bulunur.

35) *Şekildeki 18 cm ve 6 cm yarıçaplı çemberlerle temsil edilen iki makara etraflarına geçirilen bir telle sıkıca birbirine bağlanacaklardır. Kullanılacak telin uzunluğu en az kaç cm olmalıdır?*



Çözüm: Aşağıdaki şekle Pisagor Teoremi'ni uygularsak, teğetin uzunluğunu $12\sqrt{3}$ buluruz. Kenarları 12, 24 ve $12\sqrt{3}$ olan bir diküçgende diğer



açılar 60° ve 30° olurlar. Böylece, kullanılacak telin uzunluğu $2\times12\sqrt{3} + 2\pi\times18\times2/3 + 2\pi\times6\times1/3 = 28\pi + 24\sqrt{3}$ olur.

Soru 36. $8^{x^2-x} + 8^{1-x^2+x} = 9$ *denkleminin gerçel köklerinin toplamı nedir?*

Çözüm: $y = 8^{x^2-x}$ olsun. O zaman, $y + 8/y = 9$, yani $y^2 - 9y + 8 = 0$ elde ederiz. Bu denklemi çözerek $y = (9 \pm 7)/2$ buluruz, yani $y = 8$ ya da $y = 1$. Demek ki $x^2 - x = 0$ ya da 1. Her iki durumda da köklerin toplamı 1. Demek ki dört kökün toplamı $1 + 1 = 2$'dir.

Soru 37. $f(1) = 1$ *ve* $f(2x) = x + 2f(x)$ *ise* $f(16)$ *kaçtır?*

Çözüm: $f(2)$, $f(4)$, $f(8)$ ve $f(16)$'yı sırayla hesaplayabiliriz:

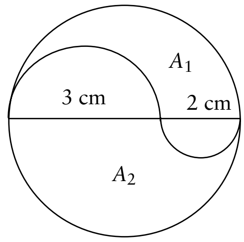
$$\begin{aligned} f(2) &= 1 + 2f(1) = 3 \\ f(4) &= 2 + 2f(2) = 8 \\ f(8) &= 4 + 2f(4) = 20 \\ f(16) &= 8 + 2f(8) = 48. \end{aligned}$$

Soru 38. *Birbirinden farklı 4 pozitif ve 5 negatif sayı arasından rastgele dört sayı seçiliyor. Bu sayıların çarpımlarının negatif olma olasılığı nedir?*

Çözüm:

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{3} + \binom{5}{3}\binom{4}{1}}{\binom{9}{4}} = \frac{60}{126} = \frac{10}{21}.$$

Soru 39. *Şekilde birbirine ve dıştaki çembere teğet olan 2 cm ve 3 cm çaplı yarı çemberlerle oluşturulan alanların A_1/A_2 oranı kaçtır?*



Çözüm: Kolaylıkla,

$$A_1 = \frac{\pi}{2}(5/2)^2 - \frac{\pi}{2}(3/2)^2 + \frac{\pi}{2} = \frac{20\pi}{8},$$
$$A_2 = \frac{\pi}{2}(5/2)^2 + \frac{\pi}{2}(3/2)^2 - \frac{\pi}{2} = \frac{30\pi}{8}$$

bulunur. Böylece $A_1/A_2 = 2/3$ olur.

40) *Kenar uzunlukları 6, 11 ve 15 birim olan üçgenin bütün kenarlarına içten teğet olan çemberin yarıçapı kaç birimdir?*

Çözüm: $p = (6 + 11 + 15)/2 = 16$, buradan da,

$$\text{Alan} = \sqrt{p(p-15)(p-11)(p-6)} = 20\sqrt{2}$$

bulunur. Yandaki şekilden de kolayca görüleceği üzere bu alan aynı zamanda

$(r/2)(6 + 11 + 15)$,

yani $16r$'ye eşittir. Demek ki, $r = 5\sqrt{2}/4$. ♦