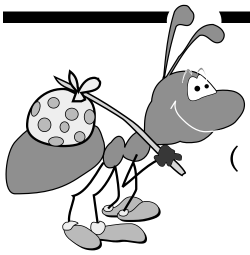


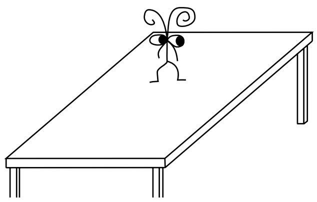
Kaybolan Açılar©

(BİR KARINCA HİKÂYESİ)

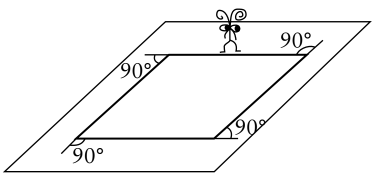
Alexandre Borovik*
alexandre.borovik@manchester.ac.uk

I. KARINCA ARINCA KAYBOLAN AÇIYI KEŞFEDİYOR

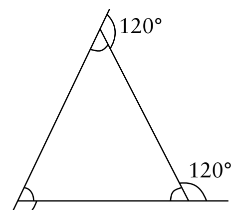
Karınca Arınca diğer karıncadaşlarıyla birlikte Matematik Bölümü'nün ofislerinden birinde, bir geometricinin masasının üstünde yaşıyordu. Ara sıra yenilen sandöviçlerin kırıntılarıyla besleniyor, oldukça mutlu bir yaşam sürüyordu.

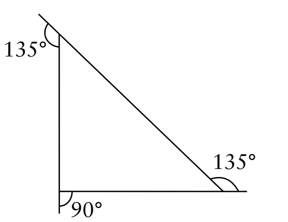


Elbette karıncalar ufukları alçak yaratıklardır, ama en zor alanlarda dolaşabilecek kadar da beceriklidirler. Tabii bu alanların en zoru da boş beyaz kâğıtlardır - geri dönüş yolunu bulmak için üstlerinde en küçük bir işaret yoktur, kaybolmak işten bile değildir! Neyse ki Arınca biraz geometri biliyordu. Örneğin uzaklıkları ve açıları ölçebiliyordu. Bir de, eğer yol boyunca binbir dönüş yapıp başladığı noktaya geri dönerse, dönüşlerinin toplamının bir tam dönüşe, yani 360 dereceye eşit olacağını biliyordu, geri dönüş yolunu bulmada oldukça faydalı bir bilgi!

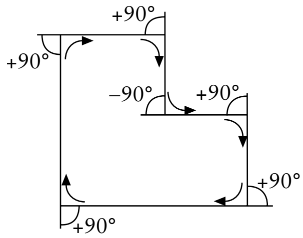


Yukarda bir örnek görüyorsunuz. İşte iki örnek daha:





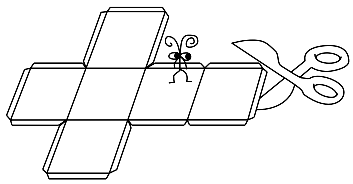
Arınca tabii ki sola dönüşleri toplayıp sağa doğru olanları çıkarıyordu. Yolu ne kadar dolambaçlı olursa olsun, sonuç hep 360 dereceydi, bir yandaki örnekte olduğu gibi.



Ama günün birinde...

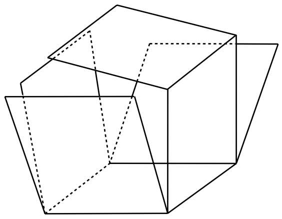
KORKUNÇ BİR KAZA OLUR!

Koca koca çelik makaslar Arınca'nın üzerinde bulunduğu kâğıttan bir küp yapmak için bir kafes keserler. Meğer geometricinin o gün küp yapacağı tutmuş...



Ve Arınca kendisini ofisin tavanından ince bir telle sarkan bir küpün içinde bulur... Felaket!

Arınca bunun hiç mi hiç farkında değildir tabii. Söylediğim gibi, Arınca'nın ufku alçaktı ve etrafındaki küpün yüzeyinin sadece küçük bir parçasını görebiliyordu. Üstelik, hiç zorluk çekmeden tepe taklak da yürüyebildiğinden, yatay ve dikey yüzeyler arasında onun için bir fark yoktu. Tırmanırken kenarları bile hissetmiyordu. Bir kenardan geçtiğinde bir yüzeyden bir başka yüzeye geçtiğinin farkına varmıyordu bile.

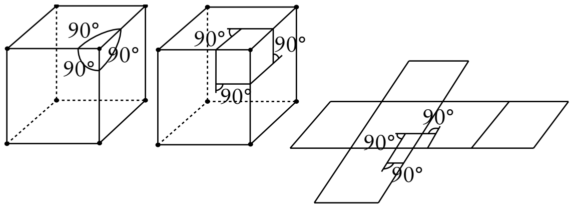


Yeni dünyasındaki tek fark, yapışkan bir maddenin sızdığı sekiz tepe noktasının varlığıydı. Bu yapışkan yapış yapış yapışıyor ve kötü kokuyordu. Bu yüzden Arınca bu noktalara yaklaşmaktan çekiniyordu. Bu sekiz noktaya basmadan sadece onların etrafından dolaşıyordu.

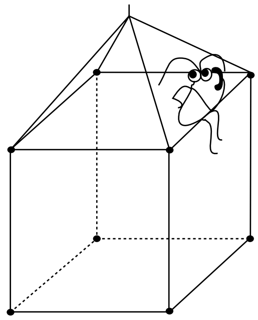
Arınca birden bir şey keşfetti ve çok şaşırdı. Bu pis kokan sekiz yapışkan nokta sihirli miydi ne!

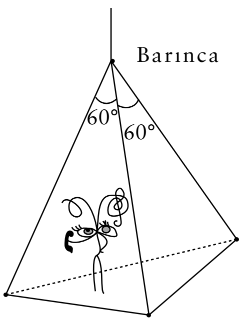
* Manchester Üniversitesi, Matematik Bölümü öğretim üyesi. Resimler Maria Borovik tarafından çizilmiştir. İngilizceden özgürce çeviren: Tülay Dikenoğlu. Bu metnin İngilizce versiyonunu http://www.ma.umist.ac.uk/avb/anthony.html'de bulabilirsiniz.

Bildiği dünyanın diğer yerlerinden farklı olarak, bu yapışkan noktaların etrafındaki dönüşlerin toplamı 270 derece oluyordu! Olur şey değil! Her zaman 360 derece olan tam dönüş, bu noktaların etrafında 90 derece eksikti. Sekiz yapışkan nokta için kaybolan toplam 720 derece bulmuştu Arınca. İki tam dönüş!

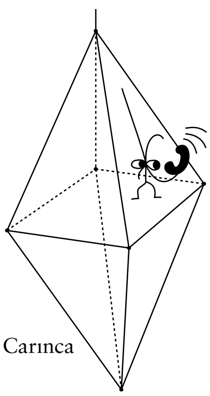


Bu sırada Arınca'ya kız arkadaşı Barınca'dan bir telefon geldi. Barınca ona üstünde olduğu kâğıda korkunç bir şey olduğunu söyledi: Kâğıdın şimdi kötü kokan ve yapış yapış olan dört noktası vardı ve bu yapış yapış noktaların etrafında yarım dönüş, yani tam 180 derece kaybolmuştu. Dört nokta için toplam 720 derece eder bu, yani iki tam dönüş kaybolmuştu!

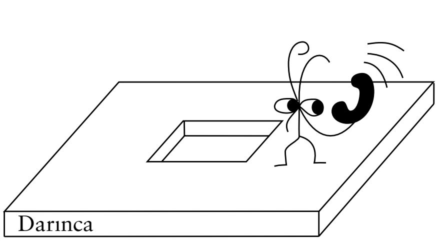




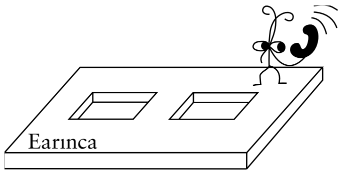
Sonra Carınca aradı, aynı haberle: İki tam dönüş kayıptı!



Darınca'nın durumuysa çok farklıydı: Onun dünyasında, yapışkan 16 nokta vardı. Bunların yarısının etrafında yürüyünce 90 derece kayboluyordu ama, diğerlerinde 90 derece artıyordu ve sonuç olarak açıların toplamları ne artıyor ne de azalıyordu...

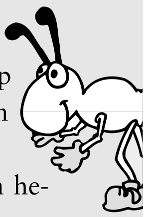


Öte yandan, bir başka arkadaşı Earınca iki tam dönüş kazanmıştı!



İlgiliye!

- Karıncaların kazançlarını ve kayıplarını hesaplarken yanılıp yanılmadıklarını kontrol edin.
- Yapışkan noktaların etrafındaki kaybın ve kazancın karıncaların dünyasındaki "delik"lerle bir ilgisi olduğunu herhalde anlamışsınızdır. (Darınca'nın dünyasında bir, Earınca'nınkinde iki delik varken, Arınca'nın, Barınca'nın ve Carınca'nınkinde hiç yoktur). Formülü tahmin edip bulduğunuz formülü Farınca'nın üç delikli dünyasıyla sınayın.
- Ve eğer gerçekten, ama gerçekten hevesliyseniz, formülü kanıtlayın.

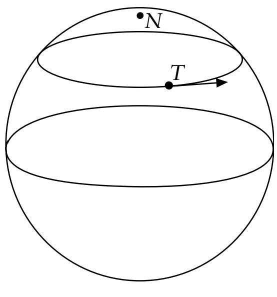


II. İNSAN KARINCA MİSALİ...

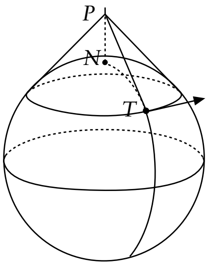
Yeryüzünde yaşayan biz insanların da aslında karıncalardan pek farkımız yok. Bizim de ufkumuz epey alçak... Akıllı karınca Arınca ve karıncadaşları gibi dünyanın bir eğriliği olduğunu ve geometrisinin bir kâğıttan epey farklı olduğunu da her zaman farketmeyiz.

Dünyadaki bir noktanın konumunu enlem ve boylamlara göre saptamaya alışığız. Dünyanın geometrisiyle ilgili tuhaflıklardan biri de, aynı enlemdeki iki şehir arasındaki en kısa yolun bu enlem boyunca olmamasıdır. Kürenin üstündeki en kısa yollar büyük çember yaylarıdır (yani kürenin üstündeki merkezden geçen çemberler). Örneğin, Ankara'yla New York neredeyse aynı enlemdedirler, ancak Ankara'dan New York'a giden bir uçak için en kısa rota İzlanda'nın epey kuzeyinden geçer! Nerden nereye!

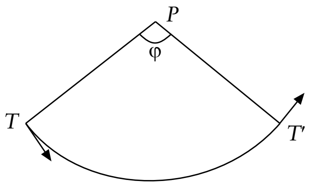
Aynı enlemde kalarak kürenin etrafında yolculuk eden T yolcusu düz yoldan sürekli sapar; her adımda yönü enlemin merkezine doğru azar azar kayar, sürekli döner. Yolcu, başlangıç noktasına vardığında, toplam dönüşü ne kadardır?



Yolcunun gerçekten saptığını görmek için karınca hikâyesindeki aynı hileyi uygulayalım. Dünyaya, yolcumuzun enleminde teğet değen devasa bir kâğıt koni yapıştıralım.

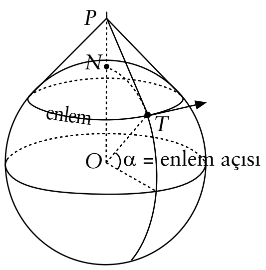


Şimdi yolcumuz aynı anda hem konide hem de kürede yürümektedir ve ufku alçak olduğundan ikisi arasında bir fark göremez (her ikisinde de kendini bir düzlemde sanıyordur.) Fakat, koniyi, küreden farklı olarak bir "meridyen" çizgisi boyunca kesebilir ve düz bir kâğıt parçası olarak açabiliriz.



Artık, küçük dönüşlerin gerçekten kesitin tepe açısındaki açıya eşit (ve epey büyük) bir φ toplamına ulaştığı iyice açık. Bunun nedeni elbette ki dünyanın "pozitif bir eğriliği"nin olmasıdır. Koniyi dünyaya yapıştırarak dünyanın bütün eğriliğini enlemin kuzeyinde toplayarak koninin tepesinde (yapışkan noktada!) yoğunlaştırdık, aynen Arınca'nın hikâyesindeki gibi. Bu sırada koninin tepe dışında kalan yerleri düzleşti.

Enlem üzerinde bir dönüş 360 derece değil, φ derece oldu. φ'yi hesaplayacağız ve böylece enlem boyunca bir tur atıldığında kaybolan açıyı bulacağız. φ elbette enleme göre değişir. Enlem 90 dereceye, yani kuzeye ne kadar yakınsa, koni o kadar yayvan olur ve φ o kadar artar, 360 dereceye yakın olur. (φ arttıkça kaybolan açı azalır. Kuzey kutbunda hiç açı azalmaz, ekvatordaysa 360 derece birden azalır!) Dolayısıyla φ'yi enlemin açısı cinsinden hesaplamalıyız.



Koni, bize verilen enlemde dünya etrafındaki dönüşün toplam açısını hesaplama olanağını verir, hem de son derece basit bir geometri bilgisiyle.

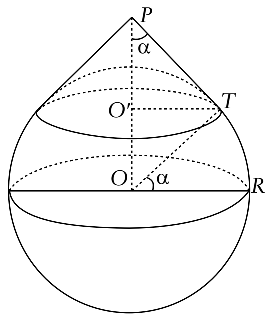
a) Enlemin uzunluğunu açısı cinsinden bulmak için, enlemin açısını α'yla gösterelim. Aşağıdaki resimde de görüleceği üzere,

$$|O'T| = |OT| \cos\alpha = |OR| \cos\alpha \qquad (*)$$

olur. Buradan da, enlem çemberinin uzunluğunun

$$2\pi \times |OR| \times \cos\alpha$$

olduğu çıkar. Şimdi aynı uzunluğu başka türlü hesaplayacağız.



b) Açıları radyan cinsinden ölçtüğümüzde, *TT'* yayının uzunluğu φ × |*PT*|'ye eşittir (sol sütundaki açılmış koniye bakın.) Bu, elbette aynı zamanda enlem çemberinin de uzunluğudur.

Koninin küreye teğetliğinden dolayı, $m(PTO) = 90$ olduğundan, $O'PT$ açısı α'dır. Bundan ve (*)'dan dolayı,

$$|PT| = |O'T| / \sin\alpha = |OR| \cos\alpha / \sin\alpha$$

bulunur ve buradan da enlemin uzunluğunun

$$\varphi\, |PT| = \varphi\, |OR| \cos\alpha / \sin\alpha$$

olduğu çıkar.

c) Yukarda, a ve b'de enlemin uzunluğunu iki değişik biçimde hesapladık. Bu iki ifadeyi karşılaştırarak,

$$2\pi\, |OR| \cos\alpha = \varphi\, |OR| \cos\alpha / \sin\alpha$$

ve sadeleştirerek,

$$\varphi = 2\pi \sin\alpha\ .$$

buluruz.

Eğer α = 90° ise, yani kuzey kutbundaysak, φ = 360° buluruz, hiç açı kaybolmamıştır. Eğer α = 0° ise, yani ekvatordaysak, φ = 0° buluruz, açı tamamıyla kaybolmuştur, ekvator boyunca dümdüz gidersek hiç dönmeden olduğumuz yere geliriz!

Özellikle, α = 30° olduğunda (Kahire'nin enlemi), toplam dönüş 180°'dir ve Kahire şöyle fantastik bir özelliğe sahip olur: Eğer Kahire'den dümdüz doğuya doğru yola çıkıp enlem boyunca yürümeye devam eder ve tüm yol boyunca yola çıktığınızda baktığınız yöne doğru bakarsanız, sonunda Kahire'ye batıdan gelmiş olursunuz elbet, ama geri geri yürüyerek ve yüzünüz batıya dönük olarak...

Eğer bilgisayarlara, kendinize ve matematiğe güvendiğinizden daha çok güveniyorsanız, o zaman internette

http://torus.math.uiuc.edu/jms/java/dragsphere/

adresinde kürenin üzerinde yönü gösteren bir oku sürüklemenizi sağlayan bir program bulabilirsiniz. Deneyin. Kürenin etrafını 30° enleminde dolaştığınızda, okun tam tersi yöne dönmüş olarak başlangıç noktasına geri döndüğünü göreceksiniz. ♦