Teoremlerin Sınırları Çizilmeli

Zekâi Sezai

Geçen sayınızda, eğer R bir tek çarpanlama bölgesi (TÇB) ise ve K, R'nin bölüm cismiyse, o zaman $R[X]$'in bir indirgenemezinin ya R'de olduğunu ya da $K[X]$'in bir indirgenemezi olduğunu kanıtlamıştınız [MD-2004-II, sayfa 49, Teorem 7]. Ancak bu sonucun TÇB olmayan tamlık bölgeleri için yanlış olduğunu söylememişsiniz: Bir tamlık bölgesi üzerine indirgenemez olan bir polinom, tamlık bölgesinin bölüm cismi üzerine indirgenir olabilir. Teoremin sınırlarının karşıörneklerle çizilmediği sürece teoremin kanıtının eksik kaldığı düşüncesinden hareketle karşıörneği sunuyoruz.

$R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ve $K = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ olsun. Kolayca görüleceği üzere K bir cisimdir, dolayısıyla K, R'nin bölüm cismidir. $R[X]$'in şu polinomlarını tanımlayalım:

$$g(X) = 2X^2 + (5 - \sqrt{5})X + (\sqrt{5} + 1),$$
$$h(X) = 2X + \sqrt{5} - 1,$$
$$f(X) = X^3 + 2X^2 + 2(-1 + \sqrt{5})X + 1.$$

Çarpınca kolayca görüleceği üzere,

$$4f(X) = g(X)h(X) \qquad (*)$$

eşitliği sağlanır.

Sav 1. *g polinomu K üzerine indirgenemezdir, yani g, $K[X]$ halkasının sabit (yani tersinir ya da 0) olmayan iki polinomunun çarpımı olarak yazılmaz.*

Kanıt: Eğer g, K üzerine indirgenir olsaydı, o zaman g, $K[X]$'ten iki tane birinci dereceden polinomun çarpımı olarak yazılırdı, dolayısıyla g'nin K'de bir kökü olurdu. g ikinci dereceden bir polinom olduğundan, g'nin K'de kökü olması demek, g'nin diskriminantı olan

$$(5 - \sqrt{5})^2 - 8(\sqrt{5} + 1)$$

elemanının, yani $22 - 18\sqrt{5}$'in K'de bir tamkare olması demektir. Ama, normun tanımından dolayı [MD-2004-I, sayfa 22],

$$N(22 - 18\sqrt{5}) = 22^2 - 18^2 \times 5 = 484 - 1620 < 0.$$

Oysa bir karenin normu da kare olmak zorundadır. Demek ki g'nin diskriminantı K'de bir kare olamaz, yani g'nin K'de bir kökü yoktur, dolayısıyla g polinomu K üzerine indirgenemezdir. □

Sav 2. *f, $R[X]$'in bir indirgenemezidir.*

Kanıt: f başkatsayısı 1 olan bir polinom olduğundan, f, R'nin bir indirgenemezine bölünemez. Dolayısıyla, eğer f, $R[X]$'te indirgenir olsaydı, f, $R[X]$'in derecesi 0'dan büyük ve başkatsayıları R'de tersinir olan iki polinomunun çarpımı olurdu. Ayrıca, f üçüncü dereceden olduğundan, çarpımı olduğu polinomlardan biri, birinci dereceden olurdu. Böylece f'yi bölen bu birinci dereceden polinomun ve dolayısıyla f'nin de R'de bir kökü olurdu. Bu kök (1)'den dolayı ya g'nin ya da h'nin kökü olurdu. Ama g'nin K'de (Sav 1'den dolayı), h'nin de R'de (h'nin tanımından dolayı) kökü yok. □

Öte yandan (1)'den dolayı f, K üzerine indirgenir bir polinomdur. Görüldüğü üzere bir R tamlık bölgesi üzerine indirgenemez olan bir polinom, bölüm cismi üzerine indirgenir olabiliyor.

Alıştırma. g'nin R üzerine de indirgenemez olduğunu kanıtlayın.

Bu örneği biraz işleyerek beklenmedik bir başka durum daha yaratabiliriz. Öyle $R \le K \le F$ bulacağız ki,

R bir tamlık bölgesi olacak,
K ve F birer cisim olacaklar,
K, R'nin bölüm cismi olacak,
F'de R üzerine tam olan bir a eleman olacak, ama a'nın R üzerine 1 başkatsayılı minimal polinomu (ki bu polinomun R üzerine indirgenemez olması gerektiğini biliyoruz, bknz. MD-2004-I, sayfa 36), K üzerine indirgenir olacak.

İşte buna örnek: R, K, g ve f yukardaki gibi olsun. $F = K[X]/\langle g\rangle$ olsun. Elbette $R \le K \le F$. g polinomu $K[X]$'te bir indirgenemez olduğundan F bir cisimdir. a, X'in F'deki imgesi olsun. O zaman $g(a) = 0$'dır ve g, a'nın K (ya da R) üzerine minimal polinomudur.

(1)'den dolayı $f(a) = 0$, dolayısıyla a, R üzerine tam bir elemandır. f, R üzerine indirgenemez olduğundan, f, a'yı sıfırlayan, R katsayılı ve 1 başkatsayılı en küçük dereceli polinomdur.

Burada dikkati çekmek istediğimiz husus g ve f polinomlarının değişik olmalarıdır. ♦