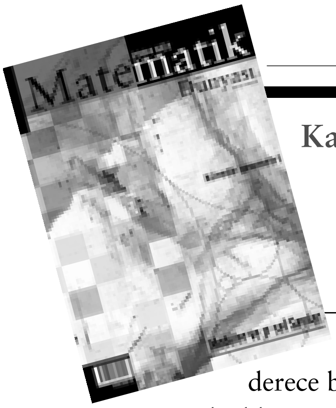

Kapak Konusu: Modüler ve p-sel Sayılar

İmkânsızı Başarmaya Çalışmak

I. Bu Bir. İlk olarak, son derece basit bir denklem çözeceğiz, $X + 1 = 0$ denklemini.

Tamsayılarda çözüm çok kolay olduğundan, denklemi doğal sayılarda, yani $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ... \}$ kümesinde çözmeye çalışalım. Nitekim, bu denklemi negatif sayıların da bulunduğu tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$'de herkes çözer ($x = -1$ tek çözümdür); zor olan, bu denklemi $\mathbb{Z}$'de değil, negatif sayıların bulunmadığı $\mathbb{N}$'de çözmektir! Şeytan azapta gerek!

Bu yazıyı bir masal gibi okumalısınız. Hayal aleminde bir yolculuk yapacağız. Görmediğiniz, duymadığınız, işitmediğiniz bambaşka bir dünyaya doğru yola çıkacağız. İlerde, başka yazılarda bu dünyayı inşa edeceğiz.

$X + 1 = 0$ denkleminin doğal sayılarda çözümü yoktur diyenlerin bir defa daha yazının başlığını dikkatlice okumalarını öneririm. Çözümü bulmayacağız, bulmaya **çalışacağız!**

Denklemin olası çözümüne x diyelim, bakalım başımıza neler gelecek. x, bir doğal sayı, bunu unutmayalım.

Madem ki x bir çözüm, o zaman,

$$x + 1 = 0. \qquad (1)$$

Bu eşitlikten x'in tek sayı olmak zorunda olduğu çıkar, çünkü eğer x çift sayı olsaydı, o zaman $x + 1$ tek sayı olurdu ve elbette bir tek sayı 0'a eşit olamaz; demek ki x bir tek sayı.

x tek sayı olduğundan, bir $x_1 \in \mathbb{N}$ için,

$$x = 1 + 2x_1 \qquad (2)$$

eşitliği geçerlidir. Bu denklemi (1)'e yerleştirelim:

$$0 = x + 1 = (1 + 2x_1) + 1 = 2x_1 + 2 = 2(x_1 + 1).$$

Ardından 2'yi sadeleştirelim:

$$x_1 + 1 = 0 \qquad (3)$$

buluruz; aynen (1)'deki denklem, sadece x yerine x_1 var. (1) denklemini çözmek için gene (1) denklemini çözmek gerektiği gibi yolumuza taş koyacak her türlü düşünceye kulaklarımızı tıkayıp devam edelim. x için yaptığımızı x_1 için yapalım.

(3) denkleminden x_1'in tek sayı olmak zorunda olduğu çıkar, çünkü eğer x_1 bir çift sayı olsaydı, o zaman $x_1 + 1$ tek sayı olurdu ve elbette bir tek sayı 0'a eşit olamaz.

x_1'in tek sayı olması gerektiğini bulduk. Demek ki, bir $x_2 \in \mathbb{N}$ için,

$$x_1 = 1 + 2x_2 \qquad (4)$$

eşitliği geçerli. Bu denklemi (3)'e koyalım:

$$0 = x_1 + 1 = (1 + 2x_2) + 1 = 2x_2 + 2.$$

Ardından 2'yi sadeleştirelim.

$$x_2 + 1 = 0. \qquad (5)$$

buluruz. Hiç durmadan devam edelim. Aynı döngüyü tekrar tekrar yaşayacağız, x_2'nin belli bir x_3 için $1 + 2x_3$'e eşit olduğunu, x_3'ün de belli bir x_4 için $1 + 2x_4$'e eşit olduğunu, ... buluruz. Bulduklarımızı yazalım:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2x_1 \\ x_1 &= 1 + 2x_2 \\ x_2 &= 1 + 2x_3 \\ x_3 &= 1 + 2x_4 \\ x_4 &= 1 + 2x_5 \\ &\ldots \end{aligned}$$

ve bunları teker teker yerlerine koyalım:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2x_1 \\ &= 1 + 2(1 + 2x_2) \\ &= 1 + 2(1 + 2(1 + 2x_3)) \\ &= 1 + 2(1 + 2(1 + 2(1 + 2x_4))) \\ &= 1 + 2(1 + 2(1 + 2(1 + 2(1 + 2x_5)))) \\ &\ldots \end{aligned}$$

Açalım bunları:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2x_1 \\ &= 1 + 2 + 4x_2 \\ &= 1 + 2 + 4 + 8x_3 \\ &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16x_4 \\ &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32x_5 \\ &\ldots \\ &= 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n x_n \\ &\ldots \end{aligned}$$

$X + 1 = 0$ denkleminin bir çözümünü bulduk gibi. Yukardaki hesapları "sonsuza" kadar götürürsek (masal bu ya!)

$$x = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots.$$

buluruz. (En sondaki x_n'yi koyacak yer kalmadı!)

Sağlamasını yapalım, bakalım gerçekten $1 + x = 0$ eşitliği doğru mu? Yukardaki eşitliklerin sağına ve soluna 1 ekleyip biraz aritmetik yapmak yeterli:

$$\begin{aligned}1 + x &= 2 + 2x_1\\ &= 4 + 4x_2\\ &= 8 + 8x_3\\ &= 16 + 16x_4\\ &= 32 + 32x_5\\ &\ldots\\ &= 2^n + 2^n x_n\\ &\ldots\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi $1 + x$ "sayı"sı, 2'ye 4'e, 8'e, 16'ya ve genel olarak her 2^n sayısına bölünüyor, yani 0'a eşit. Demek ki $1 + x = 0$.

$1 + x = 0$ eşitliğini bir de şöyle görebiliriz:

$$\begin{aligned}1 + x &= 1 + (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots)\\ &= 2 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots\\ &= 4 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots\\ &= 8 + 8 + 16 + 32 + \ldots\\ &= 16 + 16 + 32 + \ldots\end{aligned}$$

İkinin güçleri gittikçe sağa kayıyorlar ve sonsuzda kayboluyorlar!

Bundan da şu çıkar: $1 + X$ denkleminin doğal sayılarda bir çözümü olsaydı, bu çözüm $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$ "sayısı"na eşit olurdu.

Bulduğumuz çözümü

$$x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots$$

olarak yazıp, $1 + x = 0$ eşitliğinin bir defa daha sağlamasını yapalım. x'i 2'yle çarpıp 1 ekleyelim:

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots\\ 2x &= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots\\ 1 + 2x &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi $1 + 2x = x$, yani $1 + x = 0$.

Bu çözümün ne kadar doğru olduğu, zaten, üniversiteye hazırlanan her gencin bildiği

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \ldots = \frac{1}{1-t}$$

eşitliğinden de bellidir. Bu eşitlikte (hakkımız olmayarak, ama hak istenmez alınır!) $t = 2$ alırsak, aynen,

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots = \frac{1}{1-2} = -1$$

buluruz!

II. Bu İki. İstim üzerinde olduğumuzdan zaman kaybetmeden daha büyük başarılara imza atalım. Bu kez, yukardakinden çok daha zor bir denklem olan $X^2 + 1 = 0$ denklemini çözmeye çalışalım. İşi karmaşıklaştırmanın alemi yok, çözümü doğal sayılarda arayalım.

Çözüme x diyelim. $x^2 + 1 = 0$ olduğundan, x tek sayı olmalıdır. (Eğer x çift olsaydı, x^2 de çift olurdu, o zaman da $x^2 + 1$ tek olurdu ve 0'a eşit olamazdı!) Madem ki x bir tek sayı, o zaman, bir x_1 için, x'i $1 + 2x_1$ şeklinde yazabiliriz:

$$x = 1 + 2x_1.$$

Şimdi x'in sağlaması gereken $x^2 + 1 = 0$ denklemine x'in bu değerini yerleştirelim:

$$\begin{aligned}0 = x^2 + 1 &= (1 + 2x_1)^2 + 1\\ &= (1 + 4x_1 + 4x_1^2) + 1\\ &= 2 + 4x_1 + 4x_1^2.\end{aligned}$$

Sağ taraftan 2'yi sadeleştirelim:

$$1 + 2x_1 + 2x_1^2 = 0$$

buluruz. Bu kez çetin bir cevize çattık: x_1 ne olursa olsun sol taraftaki bir tek sayıdır ve sıfıra eşit olamaz. Dolayısıyla $1 + 2x_1 + 2x_1^2 = 0$ denklemini sağlayan bir x_1 bulunamaz.

$X^2 + 1 = 0$ denklemi doğal sayılarda çözülemez deyip pes edeceğimizi sananlar yanılıyorlar. Demek ki yanlış yöntem seçmişiz! Araştırmamıza başka bir yön çizelim.

III. Olmadı Baştan. Yukarda $X^2 + 1 = 0$ denklemine modülo 2 baktık (x'in tekliği ya da çiftliği üzerine düşündük) ve başaramadık. Bu sefer modülo 3 bakalım.

x gene $X^2 + 1 = 0$ denkleminin bir çözümü olsun. x'i 3'e böldüğümüzde kalan sayı 0, 1 ya da 2'dir. Yani x, ya $3x_1$ ya $3x_1 + 1$ ya da $3x_1 + 2$ biçiminde yazılır. $i = 0$, 1 ya da 2 için,

$$x = 3x_1 + i$$

yazalım. Demek ki,

$$\begin{aligned}0 = x^2 + 1 &= (3x_1 + i)^2 + 1\\ &= 9x_1^2 + 6x_1 i + i^2 + 1.\end{aligned}$$

Bundan 3'ün $i^2 + 1$'i bölmesi gerektiği çıkar. $i = 0$, 1, 2 olduğundan, teker teker deneyelim:

i	i^2	i^2+1
0	0	1
1	1	2
2	4	5

Bir kez daha hüsrana uğradık! $i^2 + 1$, i ne olursa olsun 3'e bölünmüyor. Başarısızlıktan yılmayalım. Zaten daha başından beri başaramayacağımızı bilmiyor muyduk! Yenilen pehlivan güreşe doymazmış! Çözüm aramaya devam edelim.

IV. Rövanş. Şimdi modülo 5 deneyelim. Gene $X^2 + 1 = 0$ denklemini çözmeye çalışacağız ve çözümü gene doğal sayılarda arayacağız! Olası çözüme x diyelim. Demek ki,

$$x^2 + 1 = 0, \qquad (6)$$

dolayısıyla,

$$x^2 = -1 \equiv 4 \text{ mod } 5.$$

Modülo 5, sadece 2 ve 3'ün karesi 4'tür. Yani x, 5'e bölündüğünde kalan 2 ya da 3 olmalıdır. Dolayısıyla,

$$\text{ya } x \equiv 2 \text{ mod } 5 \text{ ya da } x \equiv 3 \text{ mod } 5$$

olmalıdır. Yani bir x_1 için,

$$\text{ya } x = 2 + 5x_1 \text{ ya da } x = 3 + 5x_1.$$

Önce,

$$x = 2 + 5x_1 \qquad (7)$$

ile deneyelim, olmazsa diğerini deneriz. x'in bu değerini $x^2 + 1 = 0$ denklemine yerleştirip x_1 için elde edeceğimiz koşula bakalım:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + x^2 = 1 + (2 + 5x_1)^2 \\ &= 1 + (4 + 20x_1 + 25x_1^2) \\ &= 5 + 20x_1 + 25x_1^2. \end{aligned}$$

5'e bölerek,

$$0 = 1 + 4x_1 + 5x_1^2 \qquad (8)$$

elde ederiz. Modülo 5 alırsak

$$0 \equiv 1 + 4x_1 \text{ (mod 5)},$$

ve her iki tarafa da x_1 ekleyerek $x_1 \equiv 1$ (mod 5) buluruz. Demek ki, bir x_2 için,

$$x_1 = 1 + 5x_2. \qquad (9)$$

x_1'in bu değerini (8)'e koyup x_2 için elde edeceğimiz koşulu görelim:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + 4x_1 + 5x_1^2 \\ &= 1 + 4(1 + 5x_2) + 5(1 + 5x_2)^2 \\ &= 5 + 20x_2 + 5(1 + 5x_2)^2. \end{aligned}$$

5'i sadeleştirirsek,

$$0 = 1 + 4x_2 + (1 + 5x_2)^2,$$

yani

$$2 + 14x_2 + 5^2x_2^2 = 0 \qquad (10)$$

elde ederiz. Bu denklemi modülo 5 görelim:

$$2 + 4x_2 \equiv 0 \text{ (mod 5)}.$$

Her iki tarafa da x_2 eklersek, $x_2 \equiv 2$ (mod 5) bulunur. Demek ki bir x_3 için,

$$x_2 = 2 + 5x_3. \qquad (11)$$

Bu değeri (10)'a koyup,

$$\begin{aligned} 0 &= 2 + 14x_2 + 5^2x_2^2 \\ &= 2 + 14(2 + 5x_3) + 5^2(2 + 5x_3)^2 \\ &= 30 + 70x_3 + 5^2(2 + 5x_3)^2. \end{aligned}$$

5'le sadeleştirerek,

$$0 = 6 + 14x_3 + 5(2 + 5x_3)^2.$$

ve biraz hesapla,

$$26 + 114x_3 + 5^3x_3^2 = 0 \qquad (12)$$

buluruz. Modülo 5 alalım:

$$1 + 4x_3 \equiv 0 \text{ (mod 5)}.$$

Her iki tarafa da x_3 eklersek, $x_3 \equiv 1$ (mod 5) bulunur. Demek ki bir x_4 için,

$$x_3 = 1 + 5x_4. \qquad (13)$$

Bu değeri (12)'ye koyup,

$$\begin{aligned} 0 &= 26 + 114x_3 + 5^3x_3^2 \\ &= 26 + 114(1 + 5x_4) + 5^3(1 + 5x_4)^2 \\ &= 140 + 114 \times 5x_4 + 5^3(1 + 5x_4)^2 \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. 5'i sadeleştirelim:

$$28 + 114x_4 + 5^2(1 + 5x_4)^2 = 0. \qquad (13)$$

Modülo 5 alalım:

$$3 + 4x_4 \equiv 0 \text{ (mod 5)}.$$

Her iki tarafa da x_4 ekleyelim: $x_4 \equiv 3$ (mod 5). Demek ki bir x_5 için,

$$x_4 = 3 + 5x_5. \qquad (14)$$

Belli ki hiç durmadan hep devam edebileceğim, hissettim bunu, içime doğdu! Buraya dek bulduklarımızı toparlayalım.

$$\begin{aligned} x &= 2 + 5x_1, \\ x_1 &= 1 + 5x_2, \\ x_2 &= 2 + 5x_3, \\ x_3 &= 1 + 5x_4, \\ x_4 &= 3 + 5x_5. \end{aligned}$$

Daha devam etmemiz lazım ama her şeyin bir sınırı olduğu gibi bu derginin sayfa sayısı da sınırlı. Bulduklarımızı yerine koyalım:

$$\begin{aligned} x &= 2 + 5x_1 \\ &= 2 + 5(1 + 5x_2) \\ &= 2 + 5(1 + 5(2 + 5x_3)) \\ &= 2 + 5(1 + 5(2 + 5(1 + 5x_4))) \\ &= 2 + 5(1 + 5(2 + 5(1 + 5(3 + 5x_5)))), \end{aligned}$$

ya da

$$x = 2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^4 + 5^5x_5.$$

Hesaplara devam etmedik ama bir başka yazıda kanıtlayacağımız üzere devam edebilirdik ve önümüze çıkan denklemleri sonsuza dek çözebilirdik. Devam etseydik, "sonunda", $x^2 + 1 = 0$ denkleminin

$$x = a_0 + a_1 5 + a_2 5^2 + a_3 5^3 + a_4 5^4 + a_5 5^4 + \ldots$$

biçiminde sonsuza dek uzanan bir "çözümünü" bulacaktık. Biz sadece a_0, a_1, a_2, a_3, a_4'ü bulup daha fazla sabredemeyerek geri kalan katsayıları bulmayı okura bıraktık. En azından x'in

$$x = 2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^4 + \ldots$$

diye başlayıp sonsuza kadar devam ettiğini biliyoruz (daha doğrusu devam ettiği içimize doğdu! 5^4'ün katsayısı 3 yerine 2 olsaydı tümevarımla malum şeyi kanıtlamaya çalışabilirdik, ama ne yazık ki umduğumuz sonuç çıkmadı.)

V. Başımıza Taş Yağacak! Çok tuhaf *sayı*lar bulduk yukarda. Biraz önce bulunan *sayı*, 0, 1, 2, 3 ya da 4'e eşit olabilen a_0, a_1, a_2, a_3, ... sayıları için,

$$a_0 + a_1 5 + a_2 5^2 + a_3 5^3 + a_4 5^4 + a_5 5^5 + \dots$$

biçiminde yazılıyordu. Toplam sonsuza kadar gidebilir de. Toplam sonsuza kadar gitmeyip durursa (yani a_i katsayıları bir zaman sonra hep 0 olursa) *sayı* bildiğimiz doğal sayı olur (o doğal sayının beş tabanında açılımını yazmış oluyoruz.)

Madem fantezi dünyasında yol alıyoruz, bu tuhaf *sayı*lardan birini alalım. Diyelim,

$$1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + \dots$$

*sayı*sını aldık. Bu *sayı*ya x diyelim:

$$x = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + \dots$$

Şimdi x'le 5'i çarpıp sonuca 1 ekleyelim:

$$x = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + \dots$$

$$5x = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + \dots$$

$$1 + 5x = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + \dots$$

buluruz, yani $1 + 5x = x$, yani $1 + 4x = 0$, yani $x = -1/4$, bu da başka bir numara!

Bir başka "sayı" alalım:

$$y = 1 + 2\cdot 5 + 1\cdot 5^2 + 2\cdot 5^3 + 1\cdot 5^4 + 2\cdot 5^5 + \dots$$

y'yi 5'le çarpalım:

$$5y = 5 + 2\cdot 5^2 + 1\cdot 5^3 + 2\cdot 5^4 + 1\cdot 5^5 + 2\cdot 5^6 + \dots$$

Sonra y'yle $5y$'yi altalta yazıp toplayalım:

$$\begin{aligned} y &= 1 + 2\cdot 5 + 1\cdot 5^2 + 2\cdot 5^3 + 1\cdot 5^4 + 2\cdot 5^5 + \dots \\ 5y &= \phantom{1 + {}} 5 + 2\cdot 5^2 + 1\cdot 5^3 + 2\cdot 5^4 + 1\cdot 5^5 + \dots \\ 6y &= 1 + 3\cdot 5 + 3\cdot 5^2 + 3\cdot 5^3 + 3\cdot 5^4 + 3\cdot 5^5 + \dots \\ &= 1 + 3\cdot 5\cdot(1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots) \\ &= 1 + 3\cdot 5\cdot(-1/4) = 1 - 15/4 = -11/15. \end{aligned}$$

(Son satırda bir üst paragrafta bulduğumuzu kullandık.) Demek ki $y = -11/90$.

Bu *sayı*lara p-**sel sayı** denir (burada $p = 5$). Daha söz edeceğiz bunlardan. ♦

Bildiğimiz Toplama ve Çarpmayla Daha Neler Neler Toplayıp Çarpılır!

Herhangi iki doğal sayıyı toplayalım: Diyelim, 17625345 ile 67392067 sayılarını toplayacağız. Ne yapmamız gerektiğini biliyoruz: Bu iki sayıyı altalta yazıp toplamaya sağ basamaktan başlayıp sola doğru gideriz:

$$\begin{array}{r} 17625345 \\ +\,67392067 \\ \hline 2 \end{array}$$

Elde 1 vardır. Toplamaya sağdan ikinci basamaktan devam ederiz:

$$\begin{array}{r} 17625345 \\ +\,67392067 \\ \hline 12 \end{array}$$

Bu böyle devam eder.

Dikkat ettiyseniz topladığımız iki sayının en sol basamaklarının olmasına gerek yok... Toplayacağımız sayıları sol tarafa doğru sonsuza dek uzatabiliriz. Biz sağ basamaktan başladığımızdan toplamı gene hesaplayabilirdik.

Örnek olarak,

$$\dots 123123123123$$

*sayı*sıyla,

$$\dots 678967896789$$

*sayı*sını toplayalım. Bunlar, bizim bildiğimiz anlamda sayılar değil, sol tarafları hiç durmadan sonsuza dek gidiyor, ama olsun, gene de biraz sayıya benziyorlar.

İşte bu iki sayının toplamı şöyle başlar:

$$\begin{array}{r} \dots 123123123123 \\ +\,\dots 678967896789 \\ \hline \dots 802091019912 \end{array}$$

Toplama işlemini bildiğimiz yöntemle yaptık, en sağ basamaktan başlayarak sola doğru gittik. Hiç durmayacağız belki, belki toplamayı hiç bitiremeyeceğiz, ama ne önemi var? Önemli olan bitirmek değil, başlayabilmek! En soldaki basamaklar olmasa da olur, yeter ki en sağdaki basamaklar olsun, ki işleme nereden başlayacağımızı bilelim.

Bu işleme devam edelim, bakalım biraz daha gidince tekrar edecek mi?

$$\begin{array}{r} \dots 123123123123123123 \\ +\,\dots 896789678967896789 \\ \hline \dots 019912802091019912 \end{array}$$

Evet, 802091019912 sayısı sola doğru tekrar ediyor ve bu sonsuza dek öyle gidecek.

Yukarda,

$$3 + 2\cdot 10 + 1\cdot 10^2 + 3\cdot 10^3 + 2\cdot 10^4 + 1\cdot 10^5 + \dots$$

*sayı*sıyla,

$$9 + 8\cdot 10 + 7\cdot 10^2 + 6\cdot 10^3 + 9\cdot 10^4 + 8\cdot 10^5 + \dots$$

*sayı*sını topladık. Bu sayılara p-sel sayı adını vereceğiz ilerde. (Burada $p = 10$). Tahmin ettiğiniz üzere p-sel sayıları çarpabileceğiz de. ♦