Matematiğin Kısa Bir Tarihi-VI

Beşinci Dönem: Modern Matematik Çağı (1900'den bugüne)

Ali Ülger* / *aulger@ku.edu.tr*

Kümeler kuramının, dolayısıyla modern matematiğin babası Georg Cantor'dur (1845-1918).

Cantor, Berlin Üniversitesi'nde Kummer'in ögrencisi olarak 1869'da sayılar kuramında tezini bitirdikten sonra, meslek hayatının sonuna kadar çalışacağı Halle Üniversitesi'nde işe başlamıştır.

Georg Cantor

Profesyonel matematikçiliğinin ilk yıllarında, aynı üniversiteden E. Heine'nin Cantor'a sorduğu bir soru Cantor'un yaşamını, matematiğin de seyrini değiştirecekti. Soru şuydu: [0, 2π] aralığında toplamı sıfır olan bir trigonometrik serinin katsayılarının hepsi sıfır mıdır?

Heine'nin Cantor'a Sorduğu Soru: Eğer her $x \in [0, 2\pi]$ için,

$$\sum_n (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = 0$$

ise bütün a_n ve b_n katsayıları sıfır olmak zorunda mıdır? Bir başka deyişle, bir fonksiyon tek bir biçimde mi trigonometrik seri olarak yazılabilir? Daha önce Heine, Dirichlet, Lipschitz ve Riemann gibi ünlü matematikçilerin uğraşıp yanıtlayamadığı bu soruyu Cantor 1870'te olumlu yönde yanıtlamıştır.

Cantor bu soruyla uğraşırken gerçel sayıların o güne kadar fark edilmeyen bir özelliğinin farkına varır: Rasyonel sayılarla irrasyonel sayıların aynı çoklukta değildir. Başka bir ifadeyle, rasyonel sayılar kümesiyle irrasyonel sayılar kümesi arasında, her ikisi de sonsuz olmasına karşın, bir eşleşme yoktur. O halde bu iki kümenin sonsuzlukları aynı değildir. Böylelikle ortaya küme kavramı ve kümelerin, içerdikleri eleman "çokluğu" açısından sınıflandırılması sorunu çıktı. Bu son kavram "sonsuzun" tek değil, çok olduğunu söylemektedir. Bu da çok tepki çekecekti.

Tarih boyunca, Elea'lı Zeno'dan başlayarak [MD-2003-III, sayfa 89-91], günümüze kadar, "sonsuzluk" kavramı ve düşüncesi insanları rahatsız etmiştir. Aristo'dan Cantor'a kadar geçen zaman diliminde "sonsuz" anlayışı, temelde Aristo'nun görüşü olan şu anlayıştır: Sonsuz, ufuk çizgisi gibi, var olmayan ama konuşma kolaylığı sağladığı için kullandığımız bir kavramdır. Bu kavramı "sınırsızlık" kavramı yerine kullanırız; bir şey, çoğalarak ya da büyüyerek, önceden belirleyeceğimiz bir çokluğun ya da büyüklüğün ötesine geçme potansiyeline sahipse, o şeye "sonsuza gidiyor" deriz. Başka bir deyimle, Aristo'nun sonsuz anlayışı "potansiyel sonsuz" anlayışıdır.

Cantor'a göre ise "sonsuz" tek başına anlamlı bir sözcük değildir. Anlamlı olan "sonsuz küme" kavramıdır. Sonsuz kümeler de var olan nesnelerdir.

Sonsuz Kümeleri Saymak

X ve Y birer küme olsun. Eğer X'ten Y'ye giden birebir bir fonksiyon varsa, yani, her $x_1, x_2 \in X$ için,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

koşulunu sağlayan bir $f : X \to Y$ fonksiyonu varsa, o zaman, sezgisel olarak, Y'nin en az X kadar elemanı olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda $|X| \leq |Y|$ yazalım. Eğer yukardaki f fonksiyonu aynı zamanda örtense, yani her $y \in Y$ için $f(x) = y$ koşulunu sağlayan $x \in X$ varsa, o zaman f'ye **eşleme** denir. Bu durumda X'le Y'nin "aynı sayıda" elemanı olduğunu düşünmek ve bu durumu $|X| = |Y|$ olarak göstermek doğal bir eğilimdir. Ancak bu eşitsizlik ve eşitlik simgelerini kullanmaya hak kazanmamız için şu soruyu olumlu yanıtlamalıyız: Eğer $|X| \leq |Y|$ ve $|Y| \leq |X|$ ise $|X| = |Y|$ midir? Yani X'ten Y'ye giden ve Y'den X'e giden birebir fonksiyonlar varsa, X'le Y kümeleri arasında bir eşleme var mıdır? MD-2003-I sayfa 19'da kanıtladığımız Schröder-Bernstein Teoremi'ne göre yanıt evettir.

Yanıtlanması gereken ikinci önemli soru şudur: Her X ve Y kümeleri için $|X| \leq |Y|$ ve $|Y| \leq |X|$ eşitsizliklerinden en az biri geçerli midir? Yanıt gene "evet"tir. Ancak "evet" yanıtının bedeli vardır: Yanıtın evet olduğunu kanıtlamak için hiç de sezgisel olmayan ve geçmişte çok önemli tartışmalara neden olan Seçme Beliti'ni kabul etmek zorundayız [MD-2003-I, sayfa 29-31]. Seçme Beliti'ni bir başka sayımızda daha ayrıntılı konu edeceğiz.

* Koç Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.

Burada “sonsuz küme” deyimi, “büyükanne” gibi, bölünmez bir terim olarak anlaşılmalıdır. O halde kümeler önce sonlu-sonsuz diye ikiye ayrılacak; sonra da sonsuz kümeler, kendi aralarında, sonsuzluklarına göre çeşitli sınıflara ayrılacaklardır. Böylelikle ortaya sayısız “sonsuz küme” sınıfları çıkacaktır. Bu da çok çeşitli “sonsuzluğun” olduğu anlamına gelmektedir.

Cantor’un bu sonsuzluk anlayışı, Leopold Kronecker ve Henri Poincaré gibi bir çok ünlü matematikçi tarafından tepkiyle karşılandı. Bunun sonucu olarak da, matematikçiler, “sonsuzu” Cantor gibi algılayanlar ve Aristo gibi algılayanlar olmak üzere iki gruba ayrıldılar.


Kronecker


Poincaré

Küme kavramının aksiyomatik olarak tanımlanmaksızın, Cantor’un yaptığı gibi, sözlük anlamında kullanılması, kümeler kuramını da çıkmaza soktu. “Bütün kümelerin kümesi bir küme midir” gibi yeni paradoksları ortaya çıkardı [MD-2003-IV, sayfa 27-32]. Bu da matematikçileri kümeler teorisinden vazgeçilip vazgeçilmemesi konusunda, ikinci bir kez böldü.

Üçüncü bir sorun da, bir matematiksel kanıtın ne olduğu, geçerliliği ve meşruluğu sorunuydu. Matematikte deney ya da gözlem olmadığı için, tartışma konusu olan bir kanıt, kuram veya teorem hakkında son sözü deneye ya da gözleme bırakma olanağı yoktur. Bu, önünde sonunda, “gerçek, hakikat, doğru” gibi kavramları da içeren felsefi, hatta metafiziksel bir sorudur.

Bir matematikçi “öyle bir x vardır ki...” dediği zaman var olduğunu iddia ettiği x’i somut olarak ortaya koymak, en azından nasıl inşa edilebileceğini göstermek zorunda mıdır? Yoksa, bir din adamının dini ilkelere dayanarak şeytanın varlığını kanıtlaması gibi, bir matematikçinin de, aradığı şeyin nasıl elde edileceğini göstermeksizin, o şeyin var olduğunu birtakım ilkelere dayanarak kanıtlaması yeterli midir? Bir başka deyişle, bir şeyin varlığına nasıl ikna oluruz? Bir şeyi somut olarak bulamıyorsak ve hiçbir zaman da bulamayacağımızı biliyorsak, o şeyin varlığından ikna olabilir miyiz?

Bu üç sorunla ilgili farklı görüş ve anlayışlar matematikçileri derin tartışmalara, çeşitli ekollere, bölünmelere ve matematiği de bir krize itti. Bu, “Matematiğin Temelleri Krizi” denen krizdir. Matematiğin artık eskisi gibi kendi gelenek ve göreneklerine göre yapılamayacağını anlayan matematikçiler, bu krizden çıkmak için matematiğin “anayasal” bir temele oturtulması gerektiğini anlayarak, küme kavramını aksiyomatik olarak tanımlayıp, matematiği aksiyomatik bir kümeler kuramı üzerine inşa etmeye çalıştılar. Zamanla kümeler kuramının aksiyomlarına “seçim aksiyomu” gibi aksiyomlar da ilave edilecek ve böylelikle “modern matematik” doğacak.

Kısa bir tanım vermek gerekirse, “modern matematik” klasik matematiğin anayasal bir tabana oturtulmuş şeklidir, diye tanımlayabiliriz. Artık bu yasal çerçevede neyin meşru neyin meşru olmadığı sağlıklı bir biçimde tartışılabilecektir.

Bundan sonra matematiğin aritmetik, geometri, analiz gibi çeşitli dallarının aksiyomatik bir temele oturtulma girişimleri başladı.

David Hilbert’in (1862-1943) rüyası, matematiğin bütününü, hiç olmazsa, aritmetik ve geometri gibi dallarını öyle aksiyomatik bir temele oturtmaktı ki, o dalın her önermesi, kendine özgü aksiyomlarından hareketle, olumlu ya da olumsuz bir yönde karara bağlanabilsin.

David Hilbert pulu

20nci yüzyıl matematiğinin derinlik ve önem açısından en önemli teoremi, Einstein’nın görecelik kuramı ve Heisenberg’in belirsizlik ilkeleriyle aynı düzeyde olduğu kabul edilen, Kurt Gödel’in (1906-1978) “eksiklik teoremi” (Gödel’s Incompleteness Theorem; burada yorumlandığı anlamda, “kararsızlık” teoremi demek daha doğru olur kanısındayım) Hilbert’in bu rüyasının bir rüya olarak kalmaya mahkûm olduğunu gösterdi.

Bu teoremi somut bir örnek üzerinde açıklamaya çalışayım. Matematiğin bütününü dünya ülkeleri, aritmetik gibi çeşitli dallarını da Türkiye gibi ülkeler olarak düşünelim. Gayemiz Türkiye'ye bir anayasa yapmaktır. Bu anayasanın şu dört temel ilkeye uymasını istiyoruz:

a) **Tutarlılık İlkesi:** Anayasanın hiçbir maddesi geri kalan maddelerle çelişmemeli.

b) **Bağımsızlık İlkesi:** Anayasanın her maddesi geri kalan maddelerden bağımsız olmalı, onların sonucu olarak elde edilememeli.

c) **Tamlık İlkesi:** Meclisten geçen her yasa anayasanın hükmü altına girecek kadar kapsamlı olmalı, yani anayasa tam olmalı; dolayısıyla anayasa mahkemesine götürülen herhangi bir yasa hakkında anayasa mahkemesi "görevsizlik kararı" verememeli[1].

d) **Anlaşılırlık İlkesi:** Meclisin çıkaracağı yasa sayısında herhangi bir sınırlama konulamaz elbet, meclis her türlü önermeyi yasa olarak çıkarabilir. Dolayısıyla yukardaki tamlık ilkesine uyması gereken anayasada sonsuz sayıda madde olabilir. Madde sayısı sonlu da olsa sonsuz da olsa, hangi önermenin anayasaya dahil olduğunu, hangisinin dahil olmadığını anlayabilmemiz gerekir elbette, yoksa anayasa işlevsiz olur. Bir başka deyişle anayasa çok çok karmaşık olmamalı, hangi maddenin anayasaya dahil olduğunu, hangisinin dahil olmadığını sonlu bir zamanda (gerekirse bir bilgisayar kullanarak) anlayabilmeliyiz.

Bu ilkeler, biz ölümlülerce makul ve her anayasanın sağlaması gereken ilkeler olarak görülebilir.

Gödel, bu ilkeleri sağlayan bir anayasa yapmanın mümkün olmadığını kanıtladı. Yapılan anayasa dört ilkeden en az birine uymayacaktır. Başka bir ifadeyle, ilk iki ve dördüncü ilkeye uyan hangi anayasa kabul edilirse edilsin, meclise öyle bir yasa tasarısı verilebilir ki, bu tasarı yasalaştığı ve muhalefet de tasayı anayasa mahkemesine götürdüğü zaman, anayasa mahkemesi bu yasanın anayasaya ne uygun olduğunu ne de uygun olmadığını söyleyebilir. Bu da yaptığımız anayasanın tam olmadığını manasına gelmektedir.

Burada anayasa mahkemesinin "ülke çıkarı" ya da başka siyasi mülahazaları göz önüne almadan, önüne getirilen yasa maddesini salt mantık açısından yargıladığını kabul ediyoruz.

Matematiğe dönecek olursak... Gödel'in teoremi, aritmetiğin, nasıl bir aksiyom sistemi üzerine oturtulursa oturtulsun, tutarlı ve anlaşılır olması koşuluyla, tamlık ilkesini sağlayacak şekilde aksiyomlaştırmanın mümkün olmadığını söyler. Başka bir ifadeyle, aksiyomların dışına çıkmadan, doğruluğunu da, yanlışlığını da kanıtlayamayacağımız bir önerme üretmek her zaman mümkündür.

Buradaki temel sorun "doğru" ile "kanıtlanabilir" kavramlarının eşdeğer kavramlar olmamasıdır. Klasik mantığın temel ilkelerinden biri, bir önerme ya doğrudur ya da yanlış; aynı zamanda doğru ve yanlış, ya da başka bir şey olamaz, der. Ama Gödel'in de gösterdiği gibi aynı ilke kanıtlanabilirlik için geçerli değildir. Gödel'den önce, her önermenin, bugün olmasa bile, önünde sonunda doğruluğunun ya da yanlışlığının kanıtlanacağı yönünde derin bir inanç vardı. Gödel bu inancı yıktı.

Gödel'in teoremi çeşitli biçimlerde yorumlanabilir. Matematiğin sınırlarını aşıp felsefeye dayanan bu yorumların herbiri tartışmaya açıktır, ancak Gödel'in teoreminin matematiğin her şeyi anlamamıza olanak vermediğini, dolayısıyla her gerçeği kavrayamayacağımızı gösterdiği sanırım tartışılmazdır.

Kurt Gödel, zehirleneceğim kuşkusuyla yemek yemeyi reddettiği son yıllarında

20inci yüzyılda da, 19uncu yüzyılda olduğu gibi, çok sayıda yeni kuramlar ortaya çıktı. Bunlardan birkaçı: Metrik uzaylar (1902), topolojik uzaylar (1914), fonksiyonel analiz (1924), Banach cebirleri (1940), dağılım (distribüsyon) kuramı (1950), operatörler kuramı (1930), felaket (Catastrophe) kuramı (1950)... Bunların ayrıntılarına girmem mümkün değil.

Bu yüzyılın matematiğinin en temel özelliği hiçbir yüzyılda olmadığı kadar soyut, kavramsal ve yapısal olmasıdır. Ayrıca, matematikte çalışan sayısı ve matematiksel üretim hiçbir yüzyılda 20inci yüzyıldaki kadar yüksek olmamıştır. Üretimin çokluğu, çeşitliliği, kullanılan dilin konuya özgü oluşu, matematiğin bütünü hakkında bir bilgi sahip olmayı olanaksız kılmaktadır. Başlarken söylediğim bir sözle, bugünkü matematik hakkında bilgimiz, körün dokunduğu fil hakkındaki bilgisinden daha fazla değildir. Benimki hiç değildir. ♥

1 Benzetmemizin matematiğe daha da benzemesi için bu ilkeyi aslında şöyle değiştirmek gerekiyor: Herhangi bir yasa tasarısının ya kendisi ya da tam tersinin ifadesi anayasaya aykırı olmalı. Örneğin, 18 yaşına kadar zorunlu eğitim yasası ya anayasa tarafından onaylanmalı ya da 18 yaşına kadar zorunlu eğitim anayasaya aykırı olmalı.