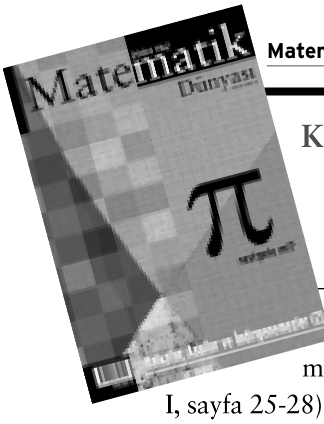

Kapak Konusu: Halkalar, Asallar ve İndirgenemezler (2)

Biçimsel Güç Serileri

Polinomları geçen sayımızda tanımlamıştık (MD-2004-I, sayfa 25-28). Gene de kısaca tekrar edelim. **Bir değişkenli polinom** ya da kısaca **polinom**,

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$$

biçiminde yazılan bir terimdir. Burada n bir doğal sayıdır. a_k **katsayıları** önceden verilmiş Z, Q, R gibi bir R halkasının elemanlarıdır. R katsayılı polinomlar kümesi $R[X]$ olarak yazılır. X^k terimlerine **monom** adı verilir. Ve tabii ki $Z[X] \le Q[X] \le R[X]$.

Bir polinomu,

$$\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$$

biçiminde yazabiliriz. İlla n'yi göstermek zorunda değilsek, polinom,

$$\sum_k a_kX^k$$

biçiminde de yazılabilir. Bu yazılımda unutulmaması gereken şey, a_k katsayılarının belli aşamadan sonra, yani belli bir n'den sonra hep 0'a eşit olduklarıdır, yani $a_{n+1} = a_{n+2} = ... = 0$ eşitlikleridir.

Polinomlarda toplama ve çarpma denilen iki işlem vardır. Bu işlemler şöyle tanımlanırlar:

$$\sum_k a_kX^k + \sum_k b_kX^k = \sum_k (a_k + b_k)X^k,$$

$$\left(\sum_k a_kX^k\right)\left(\sum_k b_kX^k\right) = \sum_k\left(\sum_{i+j=k} a_ib_j\right)X^k.$$

Belki çarpma işlemini biraz açmak gerekebilir; açalım:

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$$

polinomuyla

$$b_0 + b_1X + b_2X^2 + ... + b_mX^m$$

polinomunu çarptığımızda elde ettiğimiz

$$c_0 + c_1X + c_2X^2 + ... + c_{m+n}X^{m+n}$$

polinomunun c_k katsayıları şöyle elde edilir:

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0b_0\\
c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0\\
c_2 &= a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0\\
c_3 &= a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0\\
&\dots\\
c_k &= a_0b_k + a_1b_{k-1} + ... + a_{k-1}b_1 + a_kb_0\\
&\dots\\
c_{m+n} &= a_nb_m
\end{aligned}$$

Eğer R bir halkaysa, $R[X]$ kümesi yukardaki işlemlerle birlikte bir halka olur, üstelik R'yi içeren bir halka. Bütün bunların kanıtı çok kolaydır, tanımları bilmek yeterlidir, ama gerekli değildir!

Toplama ve çarpma işlemlerine dikkatlice bakalım... Önce toplama: İki polinomu toplamak için, toplanacak polinomların katsayılarını (a_k ve b_k katsayılarını) topluyoruz. Toplanacak polinomların sonuna yeni ifadeler eklense de, toplamın ilk katsayıları değişmez; örneğin $a(X)$ yerine $a(X) + 3X^6$ alsak, $a(X) + b(X)$ toplamında X^5'in katsayısı değişmez.

Şimdi de polinomların çarpımına bakalım. Çarpma biraz daha karmaşık bir işlem. Çarpımın sıfırıncı (yani ilk!) katsayısı, çarpılan polinomların sıfırıncı katsayılarının çarpımıdır: a_0b_0, diğer katsayıların çarpımın sıfırıncı katsayısını bulmak için önemi yoktur.

Çarpımın birinci katsayısına bakalım şimdi: Bu katsayı $a_0b_1 + a_1b_0$. Bu sefer çarpılan polinomların sadece sıfırıncı ve birinci katsayılarını kullandık, diğer katsayıları umursamadık.

Genel olarak, çarpımın k-inci katsayısı olan $a_0b_k + ... + a_kb_0$ elemanını hesaplamak için, çarpılan a ve b polinomlarının sadece ilk k katsayısını (sıfırıncı katsayı dahil olmak üzere) kullanırız, geri kalan katsayıları hiç dikkate almayız.

Çarpmak istediğimiz a ve b polinomlarının sonuna yeni katsayılar ekleyerek derecelerini yavaş yavaş artıralım. Bir zaman sonra a ve b polinomlarının sonuna ne eklersek ekleyelim çarpımın ilk k terimi değişmez. Örneğin,

$$a(X) = -1 + 2X - 3X^2 + 4X^3 + ...$$

ve

$$b(X) = 3 - X + 7X^2 + 5X^3 + ...$$

ise, "nokta nokta"ların yerine ne gelirse gelsin, $a(X)b(X)$ polinomunun ilk üç katsayısı değişmez:

$$a(X)b(X) = -3 + 7X - 18X^2 + 24X^3 + ...$$

Bir başka deyişle, yukarda verdiğimiz toplama ve çarpma kurallarının anlamlı olması için polinomların derecelerinin sonlu olması gerekmez. Özgür bırakalım polinomları! Bundan böyle derecesiz olsunlar... Ama derecelerinden azad edilmiş polinomların adlarını değiştirmek gerekir. Bunlara **biçimsel güç serileri** adını verelim. İşte bu biçimsel güç serilerinden biri:

$$1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + 5X^4 + \ldots$$

"Biçimsel güç serisi" yerine daha kısa olarak "güç serisi" adını kullanabiliriz, şaşırmayın.

Her polinom bir güç serisidir, belli bir aşamadan sonra katsayıları hep 0 olan bir güç serisi. Ama her güç serisi bir polinom değildir elbette.

Bir güç serisi,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \text{ ya da } \sum_k a_k X^k$$

olarak yazılır. Güç serilerini toplama ve çarpma kuralları polinomların toplama ve çarpma kurallarıyla aynıdır:

$$\sum_k a_k X^k + \sum_k b_k X^k = \sum_k (a_k + b_k) X^k,$$

$$\left(\sum_k a_k X^k\right)\left(\sum_k b_k X^k\right) = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) X^k.$$

Biçimsel güç serilerinin kümesi $R[[X]]$ olarak simgelenir. Aşağıdaki teoremin kanıtı kolaydır.

Teorem 1. *Biçimsel güç serileri kümesi $R[[X]]$, yukarda tanımlanan toplama ve çarpma işlemleriyle bir halkadır. Eğer R bir tamlık bölgesiyse, $R[[X]]$ de bir tamlık bölgesidir.*

Güç serileriyle biraz içli dışlı olmak için bir iki işlem yapalım. Toplama kolay olduğundan sadece çarpmayla ilgili örnekler vereceğiz.

Örnek 1. $1 - X$ polinomuyla (ki her polinom gibi bir güç serisidir),

$$1 + X + X^2 + X^3 + \ldots$$

güç serisini çarpalım. Yukarda verilen formülü uygulayacağız (elbette! başka ne yapabiliriz ki!) Formülde,

$$a(X) = 1 - X,$$
$$b(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + \ldots$$

olsun. Demek ki,

$$a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = a_3 = \ldots = 0,$$
$$b_0 = b_1 = b_2 = \ldots = 1.$$

Formüle göre sıfırıncı terim

$$a_0 b_0 = 1 \times 1 = 1,$$

ama eğer $k > 0$ ise, k-inci terim

$$a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0 = b_k - b_{k-1} = 0.$$

Demek ki, sıfırıncı terim dışında tüm terimler 0, yani,

$$a(X)b(X) = 1.$$

$R[X]$ polinom halkasında tersinir olmayan $1 - X$ polinomu $R[[X]]$ güç serileri halkasında tersinir oldu!

Aynı yöntemle,

$$(1 + X)(1 - X + X^2 - X^3 + \ldots + (-1)^k X^k + \ldots) = 1$$

eşitliği kanıtlanabilir. (Bir önceki hesapta X yerine $-X$ alın.) Bunun gibi,

$$(1 - 2X)(1 + 2X + 4X^2 + 8X^3 + \ldots) = 1$$
$$(1 - X^2)(1 + X^2 + X^4 + X^6 + \ldots) = 1$$

eşitlikleri de kanıtlanabilir.

Örnek 2. Şimdi şu kareyi hesaplayalım:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right)^2.$$

Bu kez her k için, $a_k = b_k = 1$, dolayısıyla karenin k-inci terimi

$$a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0 = k + 1.$$

dir. Sonuç:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) X^k.$$

Örnek 3. Bu sefer yukardaki güç serisinin küpünü, yani

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right)^3$$

güç serisini hesaplayalım. Elbette bir önceki örnekten yararlanacağız:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right)^3 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right)^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right)$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right) = \ldots$$

Bu kez her k için, $a_k = k + 1$ ve $b_k = 1$. Dolayısıyla, çarpımın k-inci katsayısı,

$$a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0 = 1 + 2 + \ldots + (k+1)$$
$$= (k+1)(k+2)/2.$$

Demek ki $\left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right)^3 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2} X^k.$

Görüldüğü gibi güç serileriyle hesap yapmak oldukça eğlenceli ve kolaydır, polinomların aksine... Cahit Arf Günleri'nde (sayfa 39-42) daha eğlenceli hesaplar bulacaksınız. Şimdi, biraz trigonometriyi anımsatan örnekler bulalım.

Örnek 4. R, kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'yü içeren bir halka olsun. Şu tanımları yapalım:

$$\sin X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} X^{2k+1},$$

$$\cos X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} X^{2k},$$

$$\exp X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k.$$

Bunların R halkasında bir "anlamı" olduğunu, örneğin fonksiyon olduklarını söylemiyoruz. sin X, cos X, exp X biçimsel güç serilerini sadece biçimsel olarak, herhangi bir anlam yüklemeden tanımladık. Biraz daha bilgili okur, tan X, ch X, sh X gibi bilinen başka biçimsel güç serilerini de tanımlayabilir. Aynı uyarıyı tekrarlayalım: sin X'te X yerine R'den bir eleman koyamayız, böyle bir şey ancak $\mathbb{R}$ gibi özel halkalarda yapılabilir.

Alıştırmalar

1. Fibonacci dizisi şöyle tanımlanır: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ve her $k > 1$ için $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$. Şimdi, f güç serisini $\sum_k f_k X^k$ olarak tanımlayalım. $f = X + fX + fX^2$ eşitliğini kanıtlayın. (Formülde yanlış yoktur!)

2. $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[[X]]$ halkasının sıfırgüçlü ve sıfırbölen elemanlarını bulabilirseniz bulun.

3. $(\sum_k x^k)^n$ **güç serisini hesaplayın.**

4. $p \in R$ asalsa/indirgenemezse, p'nin $R[[X]]$'te de asal/indirgenemez olduğunu kanıtlayın. (Bknz. Önsav 7 ve 9, sayfa 25-26).

5. Eğer $f = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ ise,

$$Df = f' = \sum_{n \geq 1} n a_n X^{n-1}$$

olarak tanımlansın. Df'ye f'nin **türev**i denir. Örneğin, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[[X]]$ halkasında, $D(\sum_k X^{pk}) = 0$. Her a, $b \in R$ ve $f, g \in R[[X]]$ için, $D(af + bg) = aDf + bDg$ ve $D(fg) = fDg + gDf$ eşitliklerini kanıtlayın.

Bundan sonraki alıştırmalarda R halkasının $\mathbb{Q}$'yü içerdiğini varsayalım.

6. $\sin^2 X + \cos^2 X = 1$, $D(\sin X) = \cos X$, $D(\cos X) = -\sin X$ ve $D(\exp X) = \exp X$ eşitliklerini kanıtlayın.

7. $\sin(2X) = 2 \sin X \cos X$ ve $\exp(2X) = \exp(X)^2$ gibi bildiğiniz eşitlikleri kanıtlayın.

Yukarda verdiğimiz birinci örnekte tersinir birkaç güç serisi gördük. Şimdi tüm tersinir güç serilerini bulalım.

Teorem 2. *$\sum_k a_k X^k$ güç serisinin tersinir olması için gerek ve yeter koşul $a_0 \in R^*$ koşuludur.*

Kanıt: Önce $\sum_k a_k X^k$ güç serisinin tersinir olduğunu varsayalım. Demek ki $(\sum_k a_k X^k)(\sum_k b_k X^k) = 1$ eşitliğini sağlayan bir $\sum_k b_k X^k$ güç serisi var. Bundan, $a_0 b_0 = 1$ çıkar ki bu da a_0 elemanı R'de tersinir demektir. Teoremin yarısı kanıtlandı.

Şimdi $a_0 \in R^*$ koşulunu varsayalım.

$$(\sum_k a_k X^k)(\sum_k b_k X^k) = 1$$

eşitliğini sağlayan bir $\sum_k b_k X^k$ güç serisi arıyoruz. Yani,

$$\begin{array}{llr}
a_0 b_0 & = 1 & (0) \\
a_0 b_1 + a_1 b_0 & = 0 & (1) \\
a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 & = 0 & (2) \\
a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 & = 0 & (3) \\
\quad \ldots & & \\
a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0 & = 0 & (k) \\
\quad \ldots & &
\end{array}$$

denklemlerinin hepsini birden R'de çözmemiz gerekiyor (a'ları biliyoruz, b'leri arıyoruz.) Birinci denklemden başlayıp tüm bu denklemleri teker teker çözelim.

Sıfırıncı denklem kolay: $a_0 \in R^*$ koşulundan dolayı, $a_0 b_0 = 1$ eşitliğini sağlayan bir $b_0 \in R$ vardır. Birinci denkleme geçelim. Bu denklemdeki b_0 zaten bulundu. b_1'i bulmalıyız. Denklem hemen bize b_1'in ne olması gerektiğini söylüyor:

$$b_1 = -a_0^{-1} a_1 b_0.$$

İkinci denkleme geçelim. Bu denklemi sağlayan bir b_2 bulmalıyız. Denklem bize b_2'nin ne olması gerektiğini söylüyor:

$$b_2 = -a_0^{-1}(a_1 b_1 + a_2 b_0).$$

Genel olarak, k-inci denkleme bakarak b_k'yi bulabiliriz:

$$b_k = -a_0^{-1}(a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0).$$

Demek ki $\sum_k a_k X^k$ güç serisi tersinirmiş. □

Alıştırmalar

1. cos X ve exp X güç serileri tersinirdir, terslerini bulun. sin X güç serisi tersinmez. Ama (sin X)/X güç serisi tersinir (sin X, X'e bölünür); tersini bulun.

2. f, bir önceki alıştırma kümesinin birinci alıştırmasındaki gibi tanımlanmış olsun (Fibonacci güç serisi). O alıştırmayı kullanarak,

$$f = \frac{X}{1 - X - X^2}$$

eşitliğini kanıtlayın. Şimdi,

$$\varphi_1 = (1 + \sqrt{5})/2 \text{ ve } \varphi_2 = (1 - \sqrt{5})/2$$

olsun. $1 - X - X^2 = (1 - \varphi_1 X)(1 - \varphi_2 X)$ eşitliğini kullanarak,

$$f = \frac{X}{1 - X - X^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1 - \varphi_1 X} - \frac{1}{1 - \varphi_2 X}\right]$$

eşitliğini kanıtlayın. Bundan,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi_1^n - \varphi_2^n)$$

formülünü bulun.

Teorem 2'den kolaylıkla şu sonuç çıkar:

Sonuç 3. *K bir cisim olsun. $f(X) \in K[[X]] \setminus \{0\}$ ise, tek bir n doğal sayısı ve tek bir tersinir $u \in K[X]^*$ için $f = X^n u$ eşitliği geçerlidir. n elbette sıfır olmayan ilk katsayının endisidir ve $K[[X]]$ halkasında f'yi bölen X'in en büyük gücüdür. Bir başka deyişle X (denkleriyle birlikte) $K[[X]]$ halkasının tek asalıdır ve $K[[X]]$ halkası bir tek çarpanlama bölgesidir.*

Teorem 2'nin kanıtında, tersinir bir $a(X)$ güç serisinin tersi katsayıları cinsinden bulundu. Şimdi, $a(X)$'in tersini katsayıları cinsinden değil de, sadece $a(X)$ ve sıfırıncı katsayı olan a_0 cinsinden bulalım.

$$a(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_kX^k + ...$$

tersinir güç serisi verilmiş olsun. a_0'ın tersinir olduğunu biliyoruz. $a(X)$'i a_0'ın tersiyle çarpalım ve bulduğumuz güç serisine $b(X)$ adını verelim:

$$\begin{aligned} b(X) &= a_0^{-1}a(X) \\ &= a_0^{-1}(a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_kX^k + ... \\ &= 1 + a_0^{-1}a_1X + a_0^{-1}a_2X^2 + ... + a_0^{-1}a_kX^k + ... \end{aligned}$$

$a(X)$'in tersini bulmak için $b(X)$'in tersini bulmamız yeterli olacaktır. Demek ki tersini bulmak istediğimiz güç serisinin sıfırıncı katsayısının 1 olduğunu varsayabiliriz. Bundan böyle, tersini bulmak istediğimiz güç serisini

$$b = b(X) = 1 + b_1X + b_2X^2 + ... + b_kX^k + ...$$

olarak yazalım. Ayrıca,

$$f = f(X) = -(b_1X + b_2X^2 + ... + b_kX^k + ...)$$

olsun. f'nin X'e bölündüğüne dikkatinizi çekerim, bu çok önemli olacak birazdan.

Tanımlardan dolayı tersini bulmak istediğimiz b güç serisi, X'e bölünen belli bir $f \in R[[X]]$ için,

$$b = 1 - f$$

olarak yazılıyor. Birinci örneğimizle analoji kuracak olursak, bu elemanın tersinin

$$1 + f + f^2 + f^3 + .. + f^k + ...$$

olduğunu düşünebiliriz. Nitekim öyledir de. Ancak bunu kanıtlayabilmemiz için,

$$1 + f + f^2 + f^3 + .. + f^k + ...$$

sonsuz toplamına (serisine) bir anlam vermemiz gerekiyor. Böyle sonsuz bir toplama yapmayı bilmiyoruz, öğrenmedik. Eğer f, örneğin cX gibi bir eleman olsa, o zaman,

$$1 + f + f^2 + f^3 + .. + f^k + ...$$

sonsuz toplamının ne olacağı belli,

$$1 + cX + c^2X^2 + c^3X^3 + .. + c^kX^k + ...$$

olur, ama her f^k böyle basit bir terim olmayabilir. Şimdilik anlamsız olan bu sonsuz toplamı anlamlandıralım.

f, X'e bölündüğünden, f^k'nin X^k'ye bölündüğünü unutmayalım, yani f^k güç serisinde X'in k'den küçük güçleri bulunmaz. Dolayısıyla yukardaki

$$1 + f + f^2 + f^3 + .. + f^k + ...$$

sonsuz toplamında X^{k-1} monomu sadece toplamın

$$1 + f + f^2 + ... + f^{k-1}$$

kısmında belirir, X^{k-1} monomunun katsayısını hesaplamak için toplamdaki geri kalan f^n terimlerini hesaplamaya gerek yoktur. Demek ki X^{k-1} monomunun katsayısını hesaplamak için sadece

$$1 + f + f^2 + ... + f^{k-1}$$

terimlerini dikkate almamız yeterli. Bu da $R[[X]]$ halkasında yapmasını bildiğimiz bir hesap...

Bulduklarımızı yazalım.

Önsav 4. *$a \in R[[X]]^*$ olsun. a_0, a güç serisinin sıfırıncı katsayısı olsun. a_0'ın R'de tersinir olduğunu biliyoruz. $h = 1 - a_0^{-1}a \in R[[X]]$ olsun. O zaman,*

$$1 + h + h^2 + ... + h^k + ...$$

serisinin $R[[X]]$ halkasında anlamı vardır ve

$$a^{-1} = a_0^{-1}(1 + h + h^2 + ... + h^k + ...)$$

dir.

Görüldüğü gibi, kimileyin, $R[[X]]$ halkasının sonsuz sayıda elemanını toplayıp gene $R[[X]]$'te bir elemanı bulabiliriz. Zaten bir güç serisinin kendisi bile a_kX^k monomlarının sonsuz toplamıdır. Sonsuz sayıda güç serisini ne zaman toplayabileceğimizi görelim şimdi.

Her k doğal sayısı için, $f_k \in R[[X]]$ olsun ve

$$f_0 + f_1 + f_2 + ... + f_k + ... \qquad (1)$$

gibi sonsuz bir toplamı hesaplamaya çalışalım. İki örnekle başlayalım.

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 + X + X^2 + X^3 + ... \\ f_1 &= X + X^2 + X^3 + X^4 + ... \\ f_2 &= X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + ... \\ f_3 &= X^3 + X^4 + X^5 + X^6 + ... \end{aligned}$$

ise, o zaman (1) sonsuz toplamı (eğer varsa öyle bir şey), elbette

$$1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + ...$$

olmalı, nitekim bu elemanları doğru dölek altalta yazacak olursak,

$$\begin{array}{llllllll} f_0 = & 1 + & X + & X^2 + & X^3 + ... & & & \\ f_1 = & & X + & X^2 + & X^3 + & X^4 + ... & & \\ f_2 = & & & X^2 + & X^3 + & X^4 + & X^5 + ... & \\ f_3 = & & & & X^3 + & X^4 + & X^5 + & X^6 + ... \\ ... & & & & & & & \end{array}$$

toplamın neden $1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + ...$ olması gerektiğini hemen görürüz.

Ama eğer,

$$f_0 = 1 + X$$
$$f_1 = 1 + X^2$$
$$f_2 = 1 + X^3$$
$$f_3 = 1 + X^4$$
$$\dots$$

ise, (1) sonsuz toplamını hesaplayamayız, sonsuz toplamın sıfırıncı terimini hesaplamak için sonsuz sayıda 1 toplamak zorunda kalacağımızdan, toplamın sıfırıncı katsayısını bulamayız. Nitekim,

$$f_0 + f_1 + \dots + f_k = (k+1) + X + X^2 + \dots + X^k$$

ve k büyüdükçe sabit terim olan $k + 1$ sürekli değişir, hiç aynı kalmaz.

Kolayca anlaşılacağı üzere, eğer her X^n monomu sadece sonlu sayıda f_k'de beliriyorsa, o zaman, (1) sonsuz toplamında her X^n monomunun katsayısını bulabiliriz ve (1) sonsuz toplamını hesaplayabiliriz.

Yukardaki örneklerde,

$$f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_k + \dots$$

sonsuz toplamını hesaplamak için aslında,

$$s_0 = f_0,$$
$$s_1 = f_0 + f_1,$$
$$s_2 = f_0 + f_1 + f_2,$$
$$\dots$$
$$s_k = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_k,$$
$$\dots$$

sonlu toplamlarını hesapladık ve bu sonlu toplamlarda X^n monomunun katsayısının ilelebet değişip değişmediğine baktık. Eğer her n için, X^n monomunun katsayısı s_k sonlu toplamlarında bir süre sonra sabitleşip hiç değişmiyorsa, diyelim a_k oluyorsa, o zaman gönül rahatlığıyla, (1) sonsuz toplamının $\sum_k a_kX^k$ güç serisine eşit olduğunu söyleyebiliriz.

Yukardaki açıklamalarla kolayca anlaşılan "güç serilerinde yakınsama" kavramı şöyle anlaşılmaz hale sokulur:

Tanım. *Her k doğal sayısı için, $s_k \in R[[X]]$ bir güç serisi olsun. Eğer*

$$s_0, s_1, s_2, s_3, \dots, s_k, \dots$$

*dizisinde, her X^n monomunun s_k güç serilerinde beliren katsayıları belli bir aşamadan sonra sabitleniyorsa, diyelim a_n oluyorsa, o zaman $\sum_n a_nX^n$ güç serisine $(s_k)_k$ dizisinin **limiti** adı verilir. Bunu,*

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \sum_n a_nX^n$$

olarak gösteririz. Daha matematiksel şekilde ifade edecek olursak: Her $s_k \in R[[X]]$ güç serisini, $s_{kn} \in R$ için,

$$s_k = s_{k0} + s_{k1}X + \dots + s_{kn}X^n + \dots$$

olarak yazalım. Eğer her n doğal sayısı için,

$$k > N \text{ ise } s_{kn} = a_n$$

koşulunu sağlayan N doğal sayısı ve $a_n \in R$ varsa, yani simgesel olarak, $(s_k)_k$ dizisi,

$$\forall n\ \exists N \in \mathbb{N}\ \exists a_n \in R\ \forall k \in \mathbb{N}\ (k > N \Rightarrow s_{kn} = a_n)$$

*özelliği sağlıyorsa, o zaman $\sum_n a_nX^n$ güç serisine $(s_k)_k$ dizisinin **limiti** adı verilir.*

Yukardaki tanımdaki N doğal sayısı ve halkanın a_n elemanı n'ye bağımlıdırlar elbet, n değiştikçe değişirler. Ama a_n, k'den bağımsızdır.

Şimdi sonsuz toplamın ve çarpımın tanımlarını verebiliriz:

Tanım. *Her k doğal sayısı için, $f_k \in R[[X]]$ bir güç serisi olsun.*

Eğer $(f_0 + \dots + f_k)_k$ dizisinin limiti varsa, $\sum_k f_k$ ***yakınsak****tır deriz ve*

$$\sum_k f_k = \lim_{k\to\infty} (f_0 + \dots + f_k)$$

yazarız.

Eğer $(f_0 \cdot \dots \cdot f_k)_k$ dizisinin limiti varsa, $\prod_k f_k$ ***yakınsak****tır deriz ve*

$$\prod_k f_k = \lim_{k\to\infty} (f_0 \cdot \dots \cdot f_k)$$

yazarız.

Sonsuz sayıda güç serisini kimileyin toplayabileceğimizi örneklerle gördük. Şimdi sonsuz sayıda güç serisi çarpımı örneği görelim.

$$f_0 = 1 + X$$
$$f_1 = 1 + X^2$$
$$f_2 = 1 + X^4$$
$$f_3 = 1 + X^8$$
$$\dots$$
$$f_k = 1 + X^{2^k}$$
$$\dots$$

olsun. $f_1f_2f_3f_4 \dots$ sonsuz çarpımını hesaplamaya çalışalım. Çarpımı yavaş yavaş hesaplayıp $f_0 \cdot \dots \cdot f_k$ sonlu çarpımını bulalım.

$$f_0 = 1 + X$$
$$f_0f_1 = 1 + X + X^2$$
$$f_0f_1f_2 = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$$
$$f_0f_1f_2f_3 = 1 + X + X^2 + \dots + X^8$$
$$f_0f_1f_2f_3f_4 = 1 + X + X^2 + \dots + X^{16}$$
$$\dots$$

Bu dizinin limiti olduğunu anlamak zor değil. Yukarda verilen tanıma göre,

$$f_0f_1f_2 \dots f_k \dots = 1 + X + X^2 + \dots + X^n + \dots$$

(yani $1 - X$'in tersi.)

Öte yandan,

$$(1 + X)(1 + X)(1 + X)(1 + X)(1 + X) \ldots$$

sonsuz çarpımını yapamayız, çünkü, kısmi çarpımlarda, örneğin X'in katsayısı sürekli artar:

$$\begin{aligned} 1 + X &= 1 + X \\ (1 + X)^2 &= 1 + 2X + \ldots \\ (1 + X)^3 &= 1 + 3X + \ldots \\ (1 + X)^4 &= 1 + 4X + \ldots \end{aligned}$$

Genel olarak, eğer

$$f_0 f_1 f_2 \cdots f_k$$

sonlu çarpımlarında, her n için, X^n'nin katsayıları belli bir N'den sonra hiç değişmeyip sabitleniyorsa,

$$f_0 f_1 f_2 \cdots f_k \cdots$$

sonsuz çarpımını yapabiliriz. Bu sonsuz çarpımda X^n'nin katsayısı, sonlu çarpımlarda bir zaman sonra (belli bir N'den sonra) sabitlenen X^n'nin katsayısı olur.

Yukardaki tanımdan doğrudan şu sonuç çıkar:

Sonuç 5. *$a(X) = \sum_k a_k X^k$ bir güç serisi olsun. f, X'e bölünen bir güç serisi olsun. O zaman, $\sum_k a_k f^k$ yakınsaktır. Hatta her $a_k \in R[[X]]$ ise bile $\sum_k a_k f^k$ yakınsaktır.*

Yakınsayan $\sum_k a_k f^k$ dizisini $a(f)$ olarak adlandırmak yerinde bir karardır.

0, X'e bölündüğünden, eğer $a(X)$ bir güç serisiyse, yukardaki Sonuç 5'e göre, $a(0)$ diye bir güç serisi vardır. Bu güç serisi elbette a'nın sıfırıncı katsayısı olan a_0'dır.

Yukarda tanımladığımız yakınsamak kavramını biraz değişik biçimde tanımlayalım. Bir $(f_n)_n$ güç serisi dizisi verilmiş olsun:

$$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, \ldots$$

(her n için, $f_n \in R[[X]]$). Eğer her k için, X^k, f_n güç serilerini belli bir aşamadan sonra hep bölüyorsa, yani belli bir aşamadan sonra f_n güç serilerinin sıfırıncı, birinci, ikinci, ..., k-inci katsayıları hep 0 ise, o zaman $(f_n)_n$ dizisi **0'a yakınsar** deriz. Bir başka deyişle, eğer her k için,

$$n > N \text{ ise } X^k,\ f_n\text{'yi böler}$$

önermesini doğrulayan bir N sayısı varsa, o zaman $(f_n)_n$ dizisi 0'a yakınsar deriz. Bulunması gereken N sayısı k'ye göre değiştiğinden, N yerine bazen $N(k)$ yazılır. Elbette, k büyüdükçe $N(k)$'yi bulmak zorlaşır ve k büyüdükçe genellikle $N(k)$'yi de büyük almak zorunda kalırız.

Şimdi yukardaki gibi bir $(f_n)_n$ dizisi ve ayrıca bir de f güç serisi verilmiş olsun. Eğer $(f_n - f)_n$ dizisi 0'a yakınsıyorsa, $(f_n)_n$ dizisi f'ye **yakınsar** denir. f'ye $(f_n)_n$ dizisinin **limiti** denir. Bir dizinin limiti, eğer varsa, bir tanedir ve bu durumda $(f_n)_n$ dizisinin limiti $\lim_{n \to \infty} f_n$ olarak gösterilir.

Demek ki bu tanıma göre, $\lim_{n \to \infty} f_n = f$ eşitliği için gerek ve yeter koşul, her k doğal sayısı için, yeterince büyük n'ler için, $f_n - f$ güç dizisinin ilk k katsayısının 0 olmasıdır.

Örnek 1. $a_n \in R$ ve $f_n = a_n X^n$ olsun. O zaman $(f_n)_n$ dizisi 0'a yakınsar. Çünkü k doğal sayısı verilmişse, N'yi k alalım; o zaman, her $n > N$ için, X^k, $a_n X^n$'yı böler.

Örnek 2. $f_n = X^{n-1} + X^{n+1}$ olsun. O zaman $(f_n)_n$ dizisi 0'a yakınsar. Çünkü her k doğal sayısı için, N'yi k alırsak, her $n > N$ için, X^k, f_n'yi böler.

Örnek 3. $f_n = 1 + X^{n+1}$ olsun. $(f_n)_n$ dizisi 1'e yakınsar. Ama eğer $R = \mathbb{R}$ ve $f_n = 1/n + X^{n+1}$ ise, $(f_n)_n$ dizisi yukardaki anlamda yakınsak değildir, hiçbir güç serisine yakınsamaz.

Alıştırmalar

1. $\lim_{n \to \infty} 1 + X^n = 1$.

2. $\lim_{n \to \infty} (1 + X + \ldots + X^n) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^n + \ldots = 1/(1 - X)$.

3. $f_n = 1 + nX + X^n$ olsun. $(f_n)_n$ dizisinin limiti yoktur.

4. $f_n = \sum_k \min(k+1, n)\, X^k$ olsun. $(f_n)_n$ dizisinin limitini bulun.

5. $f_n = \sum_k \max(k+1, n)\, X^k$ olsun. $(f_n)_n$ dizisinin limiti var mıdır?

Bir İtirazımız Var!

Yukarda tanımladığımız yakınsamak kavramı her R halkası için geçerliydi. Ama eğer R özel bir halkaysa daha işlevsel bir yakınsamak kavramı elde edebiliriz. Örneğin, $R = \mathbb{R}$ ve $f_n = 1/n$ ise, yukardaki yakınsamak tanımına göre $(f_n)_n$ dizisi $\mathbb{R}[[X]]$'te yakınsamaz, çünkü sıfırıncı katsayılar hiçbir zaman sabitleşmezler. Oysa bu dizinin 0'a yakınsaması eşyanın tabiatı gereğidir! Şunu anlatmak istiyoruz: Eğer R halkasında bir yakınsamak kavramı varsa, $R[[X]]$ halkasındaki yakınsamak kavramı R'deki yakınsamak kavramıyla örtüşse pek fena olmaz!

Yukarda tanımladığımız yakınsamak kavramının daha ciddi sorunları var: Her a ve f polinomları için, $a(f)$ diye bir polinomdan sözedebiliriz: a ile f polinomlarının bileşkesi. Örneğin $a = X^2$ ve $f = X + 1$ ise $a(f) = (X + 1)^2$ dir. Sonuç 4, bize, aynı şeyi güç serilerinde, eğer X, f'yi bölüyorsa yapabileceğimizi söylüyor. Örneğin, yukardaki sonuca göre cos(sin X) güç serisinden sözedebiliriz, çünkü X, sin X'i böler. Ama aynı sonuç bize sin(cos X), cos(cos X), exp(cos X) gibi güç serilerinin olup olmadığını söylemiyor, çünkü cos X, X'e bölünmez. Öte yandan, $R = \mathbb{R}$ ise, sin(cos X), cos(cos X), exp(cos X) gibi güç serilerinin olduğunu biliyoruz. Demek ki yukardaki sonuç, çok genel bir sonuç olmasına karşın, bazı halkalarda olabilecek en iyi sonuç değil. Hatta Sonuç 4, $r = 0$ dışında, eğer $f \in R[[X]]$ ve $r \in R$ ise $f(r)$ diye bir şeyin varlığı ya da yokluğuyla ilgili bir şey söylemiyor. Ama biz, $R = \mathbb{R}$ ise, cos π gibi şeylerden sözedebileceğimizi biliyoruz.

Yukardaki sonuç, her R halkası için geçerli olan elde edebileceğimiz en genel sonuçtur. Yoksa $\mathbb{R}$ gibi daha özel halkalarda daha fazla güç serisi toplayabiliriz. Buna bir örnek verelim.

Örnek: $R = \mathbb{R}$ ve $f_n = 1/2^n + X^{n+1}$ olsun. Yani,

$$f_0 = 1 + X$$
$$f_1 = 1/2 + X^2$$
$$f_2 = 1/4 + X^3$$
$$\ldots$$

olsun. $f_0 + f_1 + f_2 + \ldots$ sonsuz toplamını hesaplamaya çalışalım. Toplamın elbette

$$(1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots) + X + X^2 + X^3 + \ldots$$

olması gerekiyor, yani

$$2 + X + X^2 + X^3 + X^4 + \ldots$$

Ama gene de Sonuç 5'in kapsamına girmez bu toplam, çünkü sıfırıncı katsayılar hiç sabitleşmiyor, 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 diye sürekli artıyorlar. Öte yandan $\mathbb{R}$ halkasında $1/2^n$ sayılarını toplayabiliriz, sonucun 2 ettiğini biliyoruz. Dolayısıyla $\mathbb{R}[[X]]$ halkasında $f_0 + f_1 + f_2 + \ldots$ sonsuz toplamı

$$2 + X + X^2 + X^3 + \ldots + X^n + \ldots$$

etmeli.

Bu durumu kapsayacak bir tanım bulmak zor değildir:

Tanım. *R, $\mathbb{R}$ gibi, üzerinde "yakınsamak" kavramı olan bir halka olsun. Her k doğal sayısı için, $s_k \in R[[X]]$ bir güç serisi olsun. s_k güç serilerini, $s_{kn} \in R$ için,*

$$s_k = s_{k0} + s_{k1}X + \ldots + s_{kn}X^n + \ldots$$

*olarak yazalım. Eğer her n doğal sayısı için, $(s_{kn})_k$ dizisi R'de yakınsaksa (örneğin bir zaman sonra sabit bir diziye dönüşüyorsa), o zaman $(s_k)_k$ dizisine de **yakınsak** denir ve eğer*

$$\lim_{k\to\infty} s_{kn} = a_n$$

ise,

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \textstyle\sum_n a_nX^n$$

*yazılır. $\sum_n a_nX^n$ güç serisine $(s_k)_k$ dizisinin **limiti** adı verilir. Bir başka yazılımla,*

$$\lim_{k\to\infty} \left(\textstyle\sum_n s_{kn}X^n\right) = \textstyle\sum_n (\lim_{k\to\infty} s_{kn})X^n.$$

Özel R halkaları için tanımladığımız bu yeni yakınsamak kavramı daha önce tanımladığımız yakınsamak kavramını da içeriyor elbette, yani daha önceki tanımlanmış limit kavramıyla yakınsayan bir dizi, bu yeni kavrama göre de yakınsar.

Alıştırmalar

1. R'de karesi -1 olan bir eleman olsun, diyelim i. $\exp(iX) = \cos X + i \sin X$ eşitliğini kanıtlayın.

2. X, f'yi bölsün. $D(g(f)) = (Dg)(f) \cdot D(f)$ eşitliğini kanıtlayın.

3. $R = \mathbb{R}$ ise, yukarda verilen ikinci yakınsamak tanımına göre sin(cos X) diye bir güç serisinin olduğunu kanıtlayın.

4. $R[[X, Y]] = (R[[X]])[[Y]]$ olarak tanımlansın. En son verilen yakınsama tanımını kullanarak

$$\exp(X + Y) = \exp(X)\exp(Y)$$

eşitliğini kanıtlayın. Eğer yakınsamak kavramını birinci tanımdaki gibi alsaydık, $\exp(X + Y)$'nin yakınsak olmayacağını gösterin.

5. R, kesirli sayılar cismi $\mathbb{Q}$'yü içeren bir halka olsun. $f(X) = \sum_n f_nX^n$ herhangi bir güç serisi olsun.

$$f_n = \frac{(D^{(n)} f)(0)}{n!}$$

eşitliğini kanıtlayın ($D^{(n)}f$, f'nin n-inci türevidir.) Bundan,

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D^{(n)} f)(0)}{n!} X^n$$

eşitliğini kanıtlayın. ♥

Laurent Serileri

Güç serilerinde 1, X, X^2, X^3 gibi X'in negatif olmayan güçlerini toplarız. Toplamaya X'in herhangi bir negatif gücünden başlarsak ne olur?

$$f_{-2}X^{-2} + f_{-1}X^{-1} + f_0 + f_1X + f_2X^2 + \ldots$$

gibi elemanlardan oluşan daha geniş bir halka buluruz. Eğer R bir halkaysa,

$$R((X)) = \{\textstyle\sum_{n>N} f_nX^n : N \in \mathbb{Z} \text{ ve } f_n \in R\}$$

olsun. Toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerini tahmin ettiğimiz gibi tanımlayalım.

Eğer R bir cisimse, $R((X))$ de bir cisimdir. Bunun kanıtı – bu aşamada artık – oldukça kolaydır ve okura bırakılmıştır. ♥