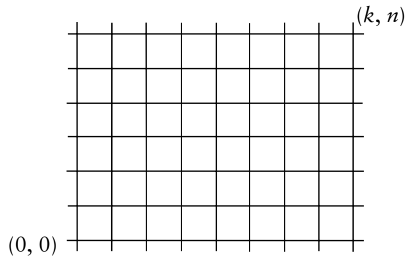
Cahit Arf Matematik Günleri III - 2004

İkinci Gün Soruları

28 Mart 2004

Problem 1. Düzlemdeki $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ızgarasında (aşağıdaki şekil) $(0, 0)$ noktasından herhangi bir (k, n) noktasına hep kuzeye ve doğuya gitmek koşuluyla ve ızgarayı takip ederek kaç değişik biçimde gidilir?



Problem 2. n ve k birer doğal sayı olsun.
$A(n, k) = \{(a_0, ..., a_{k-1}) : a_0, ..., a_{k-1} \in \mathbb{N}$ ve $a_0 + ... + a_{k-1} = n\}$
kümesinin eleman sayısını bulun.

Problem 3. n elma, adları $A_0, ..., A_{k-1}$ olan k kişi arasında kaç türlü dağıtılır? (Dikkat: Kişiler arasında ayrım yapıyoruz, ama elmalar arasında yapmıyoruz.)

Problem 4. $n \geq 1$ ve $k \geq 1$ birer doğal sayı olsun.
$B(n, k) = \{(b_1, ..., b_n) : b_i \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq b_1 \leq ... \leq b_n \leq k-1\}$
kümesinin eleman sayısını bulun.

Problem 5. Birbirinden ayırdedilemeyen n top ve bu topları boyayabileceğimiz k değişik renkte boyamız var. Bu n topu bu k değişik renge kaç türlü boyayabiliriz? Dikkat: Toplar ayırdedilmiyor ama renkler ayırdediliyor. Örnek: Üç top ve kırmızı ve mavi olmak üzere iki rengimiz varsa, (üçü mavi), (iki mavi, bir kırmızı), (bir mavi, iki kırmızı), (üçü kırmızı) olmak üzere dört türlü boyayabiliriz. Eğer üç top ve üç rengimiz varsa boyamayı 10 türlü yapabiliriz.

Problem 6. $n \geq 1$ bir doğal sayı olsun. n'yi kaç değişik biçimde pozitif doğal sayıların toplamı olarak yazabiliriz? (Değişik sıralamalar ayrı ayrı sayılacak, örneğin, $n = 14$ ise, $1 + 3 + 5 + 5$ ve $5 + 3 + 5 + 1$ toplamları ayrı ayrı sayılacak.)

Problem 7. $1 + t - 2t^2 + 6t^3 - 3t^6 + ...$ gibi sonsuza dek uzayabilen (polinoma benzeyen ancak sonsuza dek uzayabildiklerinden illa polinom olmayan) terimlere **güç serisi** adı verilir. Dikkat: Buradaki t bir sayı değildir, **değişken** adı verilen bir "şey"dir. Güç serileri de aynen polinomlar gibi toplanıp çarpılabilirler:

$$(a_0 + a_1t + a_2t^2 + ...) + (b_0 + b_1t + b_2t^2 + ...) = a_0+b_0 + (a_1+b_1)t + (a_2+b_2)t^2 + ...$$

$$(a_0 + a_1t + a_2t^2 + ...)(b_0 + b_1t + b_2t^2 + ...) = a_0b_0 + (a_0b_1+a_1b_0)t + (a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)t^2 + (a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)t^3 + ...$$

Bir güç serisi kısaca

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m$$

biçiminde yazılabilir. Burada, a_m katsayılarını gerçel sayılar olarak alacağız. Eğer a_m katsayıları belli bir aşamadan sonra hep 0'sa, o zaman güç serisi bir polinomdur, yoksa değildir. Eğer tüm a_m'ler 0'sa o zaman güç serisi de 0'dır.

Kolayca görüleceği üzere güç serilerini toplama ve çarpma kuralları şöyledir:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m + \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m + b_m) t^m$$

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{m_1+m_2=m} a_{m_1} b_{m_2}\right) t^m$$

7.1.i. $(1 - t)(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + ...) = 1$ eşitliğini gösterin. (Not: Her polinom gibi, $1-t$ polinomu da bir güç serisidir.)

7.1.ii. $(1 + t)g(t) = 1$ eşitliğini sağlayan bir $g(t)$ güç serisi bulun.

7.1.iii. $(1 - 2t)g(t) = 1$ eşitliğini sağlayan bir $g(t)$ güç serisi bulun.

7.2. $\left(\sum_{m=0}^{\infty} t^m\right)^2 = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) t^m$ eşitliğini gösterin.

7.3. İki güç serisini çarpabildiğimiz gibi, üç güç serisini de çarpabiliriz:

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{m_1+m_2+m_3=m} a_{m_1} b_{m_2} c_{m_3}\right) t^m.$$

Anlaşılacağı üzere sonlu sayıda güç serisini çarpabiliriz.

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} t^m\right)^k = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k-1} t^m$$

eşitliğini gösterin.

7.4. Aşağıdaki çarpımları bulun:

$(1+t)(1+t^2)$

$(1+t)(1+t^2)(1+t^4)$

$(1+t)(1+t^2)(1+t^4)(1+t^8)$

$(1+t)(1+t^2)(1+t^4)(1+t^8)(1+t^{16})$

Bulduğunuz bu sonuçlardan, kimi zaman sonsuz sayıda güç serisini çarpabildiğimiz çıkar.

$$(1+t)(1+t^2)(1+t^4)(1+t^8)\ldots(1+t^{2^n})\ldots$$

çarpımının ne olması gerektiğini söyleyin.

7.5. $(1+t)(1+t)(1+t)(1+t)(1+t)\ldots$ sonsuz çarpımı bir güç serisi olarak yazılamaz. Neden?

Problem 8. Aşağıdaki çarpımları bulun:

$(1+t)(1+t^2)$

$(1+t)(1+t^2)(1+t^3)$

$(1+t)(1+t^2)(1+t^3)(1+t^4)$

$(1+t)(1+t^2)(1+t^3)(1+t^4)(1+t^5)$

Bundan,

$$(1+t)(1+t^2)(1+t^3)\ \ldots\ (1+t^n)\ \ldots$$

sonsuz çarpımının var olduğu anlaşılmalı.

Eğer n pozitif bir tamsayıysa, $q(n)$, n'yi birbirinden değişik pozitif tamsayıların toplamı olarak yazma biçimi olsun, yani $q(n)$,

$$A(n) = \{(a_1, \ldots, a_k) : k \in \mathbb{N},\ k \geq 1,\ a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N},\ 1 \leq a_1 < \ldots < a_k \text{ ve } a_1 + \ldots + a_k = n\}$$

kümesinin eleman sayısı olsun. Ayrıca $q(0) = 1$ olsun. Örneğin $q(0) = 1$, $q(1) = 1$, $q(2) = 1$, $q(3) = 2$, $q(4) = 2$, $q(5) = 3$, $q(6) = 4$, $q(7) = 5$. Şimdi,

$$(1+t)(1+t^2)(1+t^3)(1+t^4)\ \ldots\ (1+t^n)\ \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q(n)\, t^n$$

eşitliğini kanıtlayın.

Problem 9. $\prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} t^{mk}\right)$ sonsuz çarpımı, yani,

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} t^m\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} t^{2m}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} t^{3m}\right)\ldots\left(\sum_{m=0}^{\infty} t^{km}\right)\ldots$$

ya da

$$(1+t+t^2+t^3+\ldots)(1+t^2+t^4+t^6+\ldots)(1+t^3+t^6+t^9+\ldots)\ldots$$

sonsuz çarpımı bir güç serisidir. Bu sonsuz çarpımı

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} t^{mk}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) t^n$$

olarak yazalım. Buradaki $p(n)$ sayılarının matematiğin daha güncel ve anlaşılır bir dilinde (yukardaki sorulardan esinlenerek belki) neyi ifade ettiğini bulun. ♠

İkinci yarışmaya hak kazanan 32 kişi ve ilk 10...

	Ad	Lise	Şehir	Not
1	Yasin Kerim Oktay	Ö. Samanyolu Fen L.	Ankara	90
2	Eren Mehmet Kıral	Üsküdar Amerikan L.	İstanbul	88
3	Furkan Erden	Ö. Yamanlar L.	İzmir	84
3	Hale Nur Kazaçeşme	Şehzade Mehmet L.	Manisa	84
3	Mehmet Murat Sevim	Atatürk Fen L.	İstanbul	84
6	Mehmet Kaysi	Ö. Yamanlar L.	İzmir	83
7	Erkan Özkan	Ö. Nilüfer Fen L.	Bursa	82
8	Fatih Ölmez	Ö. Şehzade Mehmet L.	Manisa	77
9	Fatih Haltaş	Ö. Samanyolu Fen L.	Ankara	76
10	Aycan Uslu	Ö. Samanyolu Fen L.	Ankara	75
10	Mehmet Fatih Çiğci	Ö. Kasımoğlu L.	İstanbul	75
	Ali Efe	Ö. Sevgi Çiçeği Anafen Fen L.	İstanbul	
	Atafırat Pir	Ö. Yamanlar L.	İzmir	
	Galip Özdemir	Ö. Antalya L.	Antalya	
	Gökhan Fidan	Bolu İzzet Baysal A. L.	Bolu	
	Halil İbrahim Güvenç	Ö. Şehzade Mehmet L.	Manisa	
	İbrahim Fenerci	Ö. Ege Lisesi	İzmir	
	Kerim Keskin	TEV İnanç Türkeş Ö. L.	Kocaeli	
	Mehmet Koçer	Ö. Servergazi Fen L.	Denizli	
	Mehmet Demirel	Ö. Fatih Fen L.	İstanbul	
	Mehmet Fatih Uslu	Ö. Yıldırım Han L.	Mersin	
	Mustafa Selman Yıldırım	Ö. Yıldırım Han L.	Mersin	
	Nesim Yiğit	Ö. Samanyolu Fen L.	Ankara	
	Onur Tidin	Ö. Fatih Fen L.	İzmir	
	Osman Telli	Ö. Kasımoğlu L.	İstanbul	
	Recep Meriç Güngör	Ö. Fatih Fen L.	İzmir	
	Recep Murathan Ak	Ö. Samanyolu Fen L.	Ankara	
	Sedat Aslan	Ö. Servergazi Fen L.	Denizli	
	Selim Önal	VKU Ö. Koç L.	İstanbul	
	Türkü Çobanoğlu	Ö. Fatih Fen L.	İzmir	
	Ufuk Selim	Tekirdağ Fen L.	Tekirdağ	
	Vildan Özdemir	Ö. Fatih Fen L.	İstanbul	