Cahit Arf Matematik Günleri III - 2004

Birinci Gün

28 Mart 2004

İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü tarafından düzenlenen Cahit Arf Matematik Günleri'nin üçüncüsü 600 dolayında öğrencinin katılımıyla gerçekleşmiştir. Cahit Arf Matematik Günleri liselerarası ve iki aşamadan oluşan bir matematik yarışmasıdır. Üç saat süren birinci aşamadan sonra seçilen 30 dolayında öğrenci gün boyu süren ikinci aşamaya hak kazanır. Daha ayrıntılı bilgi ve verilen ödüller için: http://math.bilgi.edu.tr/cahitarf.

1a. *Her $p > 1$ asal sayısı ve her $1 \le i \le p - 1$ doğal sayısı için p'nin*

$$\binom{p}{i}$$

sayısını böldüğünü kanıtlayın.

1b. *Her $p > 1$ asal sayısı, her $k \ge 1$ ve her $1 \le i \le p^k - 1$ doğal sayıları için, p,*

$$\binom{p^k}{i}$$

sayısını böler mi?

1c. *3'ün 100! sayısını bölen en büyük gücünü bulun.*

1d. *$p > 1$ bir asal sayı ve n herhangi bir doğal sayı olsun. p'nin $n!$ sayısını bölen en büyük gücünün $[n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + \ldots$ olduğunu kanıtlayın. (Burada $[x]$, x gerçel sayısının tamkısmını, yani $[x] \le x < [x]+1$ eşitsizliklerini sağlayan doğal sayıyı simgeler.*

1e. *p bir asal sayı olsun. Hangi $1 \le i \le p^2-1$ doğal sayıları için p^2 sayısı*

$$\binom{p^2}{i}$$

sayısını böler?

Kanıt: a. $i = 1, 2, \ldots, p - 1$ için,

$$\binom{p}{i} = \frac{p!}{(p-i)!\,i!} = \frac{p\times(p-1)!}{(p-i)!\,i!}$$

eşitliğinin sağının payında bulunan p asal sayısı paydada belirmediğinden, p sadeleşmez ve p,

$$\binom{p}{i}$$

sayısını böler.

b. Evet böler. Önce,

$$(X+1)^{p^{k+1}} = ((X+1)^{p^k})^p$$

eşitliğini ve (a)'yı kullanarak, k üzerine tümevarımla,

$$(X+1)^{p^k} \equiv X^{p^k} + 1 \pmod p$$

eşitliğini kanıtlayalım: $k = 0$ şıkkı çok kolay. $k = 1$ şıkkı biraz önce kanıtlanmıştı. Şimdi eşitliğin k için geçerli olduğunu varsayıp eşitliği $k+1$ için kanıtlayalım:

$$\begin{aligned}(X+1)^{p^{k+1}} &= ((X+1)^{p^k})^p \equiv (X^{p^k}+1)^p \\ &= \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}(X^{p^k})^i \equiv (X^{p^k})^p + 1 \\ &= X^{p^{k+1}} + 1 \pmod p.\end{aligned}$$

Eşitliğimiz kanıtlanmıştır. (İkinci denklikte tümevarım varsayımını, üçüncü eşitlikte binom açılımını, dördüncü denklikte (a)'da kanıtladığımız sonucu kullandık.)

Şimdi,

$$\sum_{i=0}^{p^k}\binom{p^k}{i}X^i = (X+1)^{p^k} \equiv X^{p^k} + 1 \pmod p$$

denkliğinden ve binom açılımından, $i = 1, \ldots, p^k-1$ için p'nin

$$\binom{p^k}{i}$$

sayısını böldüğü anlaşılır.

c. Yanıt 48'dir.

d. $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ eşitliğinin sağ tarafındaki çarpılan sayıların kaç kez p'ye bölündüğünü hesaplayacağız.

p'ye bölünen n'den küçük sayılar, belli bir $1 \le x \le n/p$ tamsayısı için xp biçiminde yazılırlar. Demek ki bunlar $p, 2p, 3p, \ldots, [n/p]p$ sayılarıdır ve bunlardan $[n/p]$ tane vardır.

p^2'ye bölünen n'den küçük sayılar, belli bir $1 \leq x \leq n/p^2$ tamsayısı için xp^2 biçiminde yazılırlar. Demek ki bunlar p^2, $2p^2$, $3p^2$, ..., $[n/p^2]p^2$ sayılarıdır ve bunlardan $[n/p^2]$ tane vardır.

Genel olarak, p^i'ye bölünen n'den küçük sayılar, belli bir $1 \leq x \leq n/p^i$ tamsayısı için xp^i biçiminde yazılırlar. Demek ki bunlar p^i, $2p^i$, $3p^i$, ..., $[n/p^i]p^i$ sayılarıdır ve bunlardan $[n/p^i]$ tane vardır.

Sonuç olarak, p'nin $n!$ sayısını bölen en büyük gücünün $[n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + ...$ olduğu anlaşılır.

e. Yukardaki sonuçtan p'nin $p^2!$ sayısını bölen en büyük gücünün $[p^2/p] + [p^2/p^2]$, yani $p + 1$ olduğu çıkar. Aynı nedenden, $i = 1, 2, ..., p^2-1$ için, p'nin $i!(p^2-i)!$ sayısını bölen en büyük gücü $[i/p] + [(p^2-i)/p]$ dir. Demek ki p^2 sayısının

$$\binom{p^2}{i}$$

sayısını bölmesi için $p - 1 = (p + 1) - 2 \geq [i/p] + [(p^2-i)/p]$ eşitsizliği doğru olmalıdır. Öte yandan, $[i/p] + [(p^2-i)/p]$ tamsayısı, $i/p + (p^2-i)/p$'den yani p'den zaten küçükeşit olduğundan, için $p - 1 \geq [i/p] + [(p^2-i)/p]$ eşitsizliğinin geçerli olması için gerek ve yeter koşul

$$[i/p] < i/p \text{ ve } [(p^2-i)/p] < (p^2-i)/p$$

eşitsizliklerinin birinin geçerli olmasıdır, yani i/p ve $(p^2-i)/p$ sayılarından birinin tamsayı olmamasıdır, bu da "i, p'ye bölünmüyor" koşuluna eşdeğerdir. Demek ki, p^2,

$$\binom{p^2}{i}$$

sayısını ancak ve ancak p, i'yi bölmüyorsa böler.

2. *0 ve 1'lerden oluşmuş ve içinde 00 bulunmayan (örneğin 011101101 gibi) 9 uzunluğunda kaç dizi vardır?*

Yanıt: 1 uzunluğunda koşulu sağlayan 2 dizi vardır: 0 ve 1.

2 uzunluğunda koşulu sağlayan 3 dizi vardır: 01, 10, 11.

3 uzunluğunda koşulu sağlayan 5 dizi vardır: 010, 011, 101, 110, 111.

Şimdi $n \geq 3$ olsun. İçinde 00 bulunmayan n uzunluğundaki dizilerin kümesine F_n, bu kümenin öğe sayısına da f_n diyelim. F_n kümesinde iki tür dizi vardır: Sonu 1'le bitenler ve sonu 0'la bitenler. Sonu 1'le bitenlerden o en sondaki 1'i atarsak F_{n-1} kümesinden bir dizi buluruz ve F_{n-1} kümesinden bir dizinin sonuna 1 eklersek F_n'den sonu 1'le biten bir dizi buluruz. Demek ki F_n'de sonu 1'le biten f_{n-1} tane dizi vardır. Sonu 0'la bitenlerin bir önceki terimi 1 olmalı. Bu en sondaki 10'ı atarsak F_{n-2} kümesinden bir dizi buluruz ve F_{n-2} kümesinden bir dizinin sonuna 10 eklersek F_n'den sonu 0'la biten bir dizi buluruz. Demek ki F_n'de sonu 0'la biten f_{n-2} tane dizi vardır. Dolayısıyla,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

eşitliği geçerlidir. $f_1 = 2$, $f_2 = 3$, $f_3 = 5$'le başlayan diziyi böylece devam ettirebiliriz:

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
2	3	5	8	13	21	34	55	89

(Bunlara **Fibonacci sayıları** denir.) Yanıt 89'dur.

3. *Sabit a ve x sayıları için, k, ak, a^2k, a^3k, ... biçiminde yazılan dizilere geometrik dizi denir.*

$$\{1, 2, ..., 99, 100\}$$

kümesi *n geometrik dizinin birleşimi olarak yazılıyorsa*

a) *n'nin en az 25 olduğunu,*

b) *n'nin en az 34 olduğunu kanıtlayın.*

Kanıt: (a) Aynı geometrik dizide iki asal sayı olamaz. 100'den küçük 25 asal olduğundan (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97), en az 25 geometrik dizi olmalıdır.

(b) Şimdi de p ve q asalları için pq biçiminde yazılan 100'den küçük sayılara bakalım:

$2q$'ler: 4, 6, 10, 14, 22, 26, 34, 38, 46, 58, 62, 74, 82, 86, 94

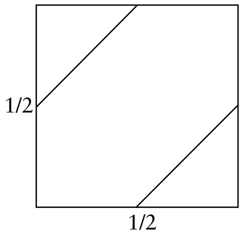
$3q$'ler: 9, 15, 21, 33, 39, 51, 57, 69, 87, 93

$5q$'ler: 25, 35, 55, 65, 85, 95

$7q$'ler: 49, 77, 91

Bunların herhangi ikisi aynı geometrik dizide bulunamazlar ve bunlardan tam 34 tane vardır.

4. *[0, 1] aralığından rastgele iki sayı (ya da nokta) seçiliyor. Bu iki sayının aralarındaki uzaklığın 1/2'den küçükeşit olma olasılığı kaçtır?*



Yanıt: Birinci noktaya x, ikinci noktaya y diyelim. [0, 1] aralığından rastgele iki x ve y noktası seçmek demek, $[0, 1] \times [0, 1]$ karesinden rastgele bir (x, y) noktası seçmek demektir.

Seçilen (x, y) noktası, $-1/2 \le x - y \le 1/2$ eşitliklerini sağlamalıdır, yani yukardaki karenin orta bölgesinde olmalıdır. Yanıt 3/4'tür.

5. [0, 1] *aralığından üç rastgele nokta seçiliyor. Aralarındaki en uzun mesafenin* 1/2'*den küçükeşit olma olasılığı kaçtır?*

Yanıt: [0, 1] aralığından üç rastgele nokta seçmek demek, $[0, 1]^3$ küpünden rastgele bir nokta seçmek demektir. Demek ki

$A = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 : \max\{|x-y|, |y-z|, |z-x|\}\}$

bölgesinin alanını hesaplamalıyız.

$[0, 1]^3$ küpünü,

$$\{(x, y, z) : 0 \le x \le y \le z \le 1\},$$
$$\{(x, y, z) : 0 \le y \le z \le x \le 1\}$$

gibi altı bölgeye ayırabiliriz. Bu bölgelerin herbirinin hacmi birbirine eşittir ve kesişimleri bir düzlem ya da doğru parçası olduğundan, kesişimlerinin hacmi 0'dır.

Hacmini hesaplamak istediğimiz A bölgesini de,

$$\{(x, y, z) : 0 \le x \le y \le z \le 1 \text{ ve } z - x \le 1/2\},$$
$$\{(x, y, z) : 0 \le y \le z \le x \le 1 \text{ ve } x - y \le 1/2\}$$

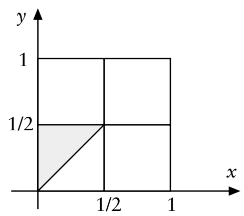
gibi altı bölgeye ayırabiliriz. Bu bölgelerin hacimleri (simetriden dolayı) birbirine eşittir.

$$\{(x, y, z) : 0 \le x \le y \le z \le 1 \text{ ve } z - x \le 1/2\}$$

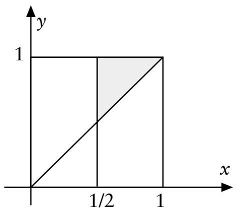
bölgesinin hacmini hesaplayalım.

Dikkat edilirse, $z = 1/2$ olduğunda bölgenin şekli değişiyor.

$z = 0$ ile $z = 1/2$ düzlemleri arasında bölge bir piramit. $z = 1/2$ ile $z = 1$ düzlemleri arasındaysa bölge, tabanları üçgen olan bir prizma. (Bu dediğimizin doğruluğunu anlamak için, aşağıda bizim de yaptığımız gibi, bölgenin, $z = 0$, $z = 1/2$ ve $z = 1$ düzlemleriyle kesitini çizmek gerekir.)



$z = 1/2$ kesiti:
$\{(x, y, 1/2) : 0 \le x \le y \le 1/2\}$
bölgesi



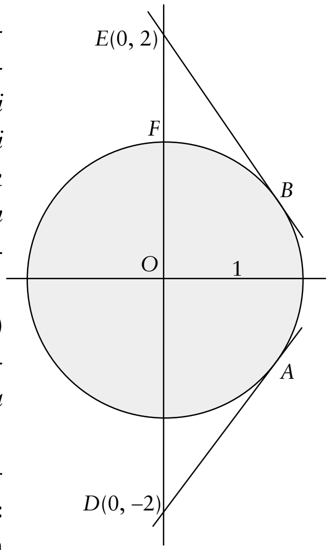
$z = 1$ kesiti:
$\{(x, y, 1) : 1/2 \le x \le y \le 1\}$
bölgesi

Piramidin hacmini hesaplayalım önce. $z = 0$ olduğunda, piramidin tepe noktası olan (0, 0, 0) noktasını elde ediyoruz. $z = 1/2$ olduğunda piramidin tabanı olan yukardaki şekildeki üçgeni elde ederiz. Üçgenin alanı 1/8. Demek ki piramidin hacmi 1/3 × taban × yükseklik = 1/3 × 1/8 × 1/2 = 1/48.

Şimdi prizmanın hacmini hesaplayalım. Taban 1/8, yükseklik 1/2. Demek ki prizmanın hacmi, 1/8 × 1/2 = 1/16.

Böylece bölgenin hacmi 1/48 + 1/16 = 1/12 olur. Bu bölgelerden 6 tane olduğundan, toplam hacim, yani olasılık 6 × 1/12 = 1/2'dir.

6. *Duygu yandaki şekildeki gibi* $D(0,-2)$ *noktasındadır ve* $E(0, 2)$ *noktasındaki evine, ortadaki birim daire biçimindeki havuza düşmeden gitmek istemektedir. Duygu'nun en kısa yolunun uzunluğunu bulun.*



$D(0, -a)$ ve $E(0, a)$ ise ve $a \ge 1$ ise, DE yolunun en kısa olması için a kaç olmalıdır?

Yanıt: Duygu'nun izlemesi gereken yol belli: Çembere teğet değen olan iki doğrudan biri üzerinde dümdüz gitmeli, çembere A noktasında değince E noktasını görene dek, yani B noktasına dek çemberi izlemeli ve E noktasını gördüğü anda E'ye dümdüz gitmeli, yani şekildeki $DABE$ yolunu izlemeli

E ve D noktalarından geçen ve çembere teğet olan doğruların denklemini bulalım. Durum simetrik olduğundan E'den geçeni bulmak yeterli. $a = 2$ yazarak, daha genel bir durumu ele alalım, yani belli bir $a \ge 1$ için $E = (0, a)$ olsun. E'den geçen teğetin denklemi $y = mx + a$ biçiminde yazılır. Doğrunun eğimi olan m'yi bulalım. Çemberin denklemi $x^2 + y^2 = 1$. Demek ki $y = mx + a$ doğrusunun çemberi kestiği noktanın birinci koordinatı $x^2 + (mx + a)^2 = 1$, yani

$$(1 + m^2)x^2 + 2amx + a^2 - 1 = 0 \qquad (1)$$

denklemini sağlar. Doğrunun çembere teğet olması için bu denklemin tek bir çözümü olmalıdır, yani diskrimimantı sıfır olmalıdır, yani

$$a^2m^2 - (1 + m^2)(a^2 - 1) = 0,$$

yani

$$1 + m^2 - a^2 = 0$$

denklemini sağlamalıdır. Eğimi negatif olan doğruyu aldığımızdan,

$$m = -\sqrt{a^2 - 1}$$

buluruz. Bunu (1) denklemine taşıyarak x'i bulabiliriz:

$$a^2x^2 - 2a\sqrt{a^2-1}x + a^2 - 1 = 0$$

ve

$$x = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}.$$

Demek ki çemberin üstünde

$$2\arccos\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$$

radyanlık bir açı gitmeliyiz. (Eğer $a = 2$ ise, $x = \sqrt{3}/2$ çıkar ve açıyı bulmak daha kolaydır: $2 \times 30° = 60° = \pi/3$ rad.) Çemberin çapı 1 olduğundan, bu da çemberin üstünde

$$2\arccos\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$$

birimlik bir yola tekabül eder. (Eğer $a = 2$ ise, çemberin üstünde $\pi/3$ gitmeliyiz.) Yani AB yolu

$$2\arccos\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$$

uzunluğundadır.

Şimdi de EB uzunluğunu bulalım. $EB \perp OB$ olduğundan,

$$EB = \tan(BOE) = \tan\left(\pi/2 - \arccos\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right).$$

Bu formül ve biraz trigonometri bize kolaylıkla doğru yanıtı buldurur. Hele $a = 2$ olduğunda, $EB = \tan(60°) = \sqrt{3}$ bulunur. Aynı sonucu daha az trigonometriyle bulalım.

B noktasının birinci koordinatını yukarda bulmuştuk:

$$x = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}.$$

Bunu çemberin denklemi olan $x^2 + y^2 = 1$ denklemine taşıyarak B'nin ikinci koordinatını da buluruz: $1/a$. Şimdi $E(0, a)$ noktasıyla

$$B = \left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}, \frac{1}{a}\right)$$

noktası arasındaki mesafeyi bulmalıyız. Bu da kolay bir hesapla çıkar:

$$\sqrt{a^2-1}.$$

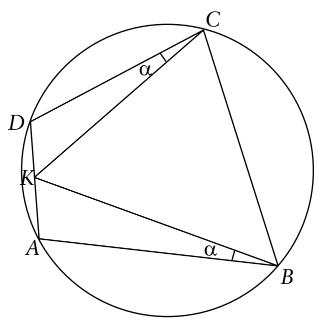
Sonuç olarak Duygu'nun toplam gitmesi gereken mesafe

$$2\sqrt{a^2-1} + 2\arccos\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$$

dir. Eğer $a = 2$ ise, $2\sqrt{3} + \pi/3$ çıkar.

Şimdi DE yolunun en kısa olması için a'nın 1 olması gerektiğini savlıyoruz. Bunu kanıtlamak için FB yayının EB doğru parçasından daha kısa olduğu kanıtlanmalıdır. Eğer α, radyan cinsinden BOF açısıysa FB yayı α uzunluğundadır. Demek ki $\alpha \le EB$ eşitsizliğini ve eşitliğin sadece $\alpha = 0$ için doğru olduğunu kanıtlamalıyız. OFB daire parçasının alanı $\alpha/2$'dir. OFB üçgeninin alanı ise, $EB \perp OB$ olduğundan, $EB/2$'dir. Demek ki $\alpha \le EB$ ve eşitlik sadece $\alpha = 0$ için doğru.

7. *Yandaki şekildeki gibi dört değişik A, B, C, D noktası bir çemberin üzerindedir. K, AD doğru parçasının orta noktasıdır. Ayrıca ABK açısı KCD açısına eşittir. CD'nin uzunluğunun AB'nin uzunluğuna eşit olduğunu kanıtlayın.*



Kanıt: α, KCD açısı olsun. Sinüs Teoremi'ne göre, A, K ve B noktalarından geçen çemberin yarıçapı $AK/2\sin\alpha$ dır. Aynı şekilde D, K ve C noktalarından geçen çemberin yarıçapı da $DK/2\sin\alpha$ dır. Demek ki bu iki çember birbirine eşit. Ayrıca bu iki çember, AD'ye K'dan dik çıkan a doğrusuna göre simetriktir. Verilen çember de bu a doğrusuna göre simetrik olduğundan, yukarıdaki çemberlerle verilen çemberin kesişim noktaları da bu a doğrusuna göre simetriktir. Dolayısıyla $AB = CD$. ♠