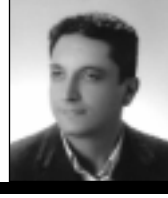


Cauchy-Schwartz ve Minkowski Eşitsizlikleri



Alper Çay*/alpercay2000@yahoo.com

Matematikte çok çok basit sonuçlar çok çok önemli olabilirler, önemli matematikçilerin adlarıyla anılabilirler, o kadar ki, sonucun önemini bilmeyen biri, bu kadar basit bir sonuca o kadar büyük bir matematikçinin adının verilmesine şaşabilir. Bu yazıda konu edeceğimiz Cauchy-Schwartz ve Minkowski eşitsizlikleri bu tür sonuçlardandır.

Cauchy-Schwartz Eşitsizliği. a_1, \dots, a_n ve b_1, \dots, b_n herhangi $2n$ gerçel sayıysa,

$$(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2).$$

Kanıt: $p(X) = (a_1X - b_1)^2 + \dots + (a_nX - b_n)^2$ olsun. Kareleri alıp parantezleri açalım. Eğer

$$A = a_1^2 + \dots + a_n^2$$

$$B = b_1^2 + \dots + b_n^2$$

$$C = a_1b_1 + \dots + a_nb_n$$

ise,

$$p(X) = AX^2 - 2CX + B$$

elde ederiz. Her $x \in \mathbb{R}$ için, $p(x)$ karelerin toplamı olduğundan, $p(x) \geq 0$ çıkar. Demek ki her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$Ax^2 - 2Cx + B = p(x) \geq 0.$$

Her gerçel sayı için geçerli olan böyle bir eşitsizlik ancak $AX^2 - 2CX + B$ polinomunun diskriminantı 0'dan küçüğe düşerse mümkündür. Demek ki $C^2 - AB \leq 0$, yani $C^2 \leq AB$, yani

$$(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2).$$

Cauchy-Schwartz eşitsizliği kanıtlanmıştır. \square

Minkowski Eşitsizliği. a_1, \dots, a_n ve b_1, \dots, b_n herhangi $2n$ gerçel sayıysa,

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}.$$

Kanıt: Cauchy-Schwartz eşitsizliğini kullanacağız. O kanıttaki A, B ve C 'yi anımsarsak, kanıtlamak istediğimiz eşitsizliğin tam tamına,

$$(A + 2C + B)^{1/2} \leq A^{1/2} + B^{1/2}$$

olduğu anlaşılır. Biz, yukardaki kanıtta, $C^2 \leq AB$ eşitsizliğini kanıtlamıştık. A ve B negatif olmadıklarından, bundan $C \leq A^{1/2}B^{1/2}$ eşitsizliği çıkar. Bu

eşitsizliği kullanarak, $A + 2C + B \leq A + 2A^{1/2}B^{1/2} + B = (A^{1/2} + B^{1/2})^2$ buluruz, yani $A + 2C + B \leq (A^{1/2} + B^{1/2})^2$, Şimdi her iki tarafın da karekökünü alırsak istediğimiz eşitsizliği elde ederiz. \square

Minkowski eşitsizliğinin önemini vurgulayan bir notla yazımızı bitirelim.

● Gerçel sayılar doğrusu \mathbb{R} üstünde bulunun ve koordinatları a_1 ve b_1 olan A ve B noktaları arasındaki mesafe $|a_1 - b_1|$ 'dir. Bu mesafeyi $d(A, B)$ olarak göstereyim. $|a_1 - b_1| = ((a_1 - b_1)^2)^{1/2}$ olduğundan,

$$d(A, B) = \left((a_1 - b_1)^2 \right)^{1/2}$$

olarak yazabiliriz.

● \mathbb{R}^2 düzleminde bulunan ve koordinatları (a_1, a_2) ve (b_1, b_2) olan A ve B noktaları arasındaki mesafeye $d(A, B)$ dersek,

$$d(A, B) = \left((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \right)^{1/2}$$

eşitliği geçerlidir.

● İçinde yaşadığımız üç boyutlu \mathbb{R}^3 uzayında bulunan ve koordinatları (a_1, a_2, a_3) ve (b_1, b_2, b_3) olan A ve B noktaları arasındaki mesafeye $d(A, B)$ dersek,

$$d(A, B) = \left((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 \right)^{1/2}$$

eşitliği geçerlidir.

● Yukardaki d fonksiyonlarının herbiri, her A, B ve C noktası için, üçgen eşitsizliği adı verilen $d(A, B) < d(A, C) + d(C, B)$ eşitsizliğini sağlar; daha gündelik bir dille: A noktasından B 'ye gitmek için C 'den geçmek AB yolunu kısaltamaz.

● n herhangi bir doğal sayı olsun. n boyutlu \mathbb{R}^n uzayının bir noktası, tanım gereği, a_1, \dots, a_n gerçel sayıları için, (a_1, \dots, a_n) olarak yazılır. $A(a_1, \dots, a_n)$ ve $B(b_1, \dots, b_n)$ noktaları arasındaki mesafeyi

$$d(A, B) = \left((a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2 \right)^{1/2}$$

olarak tanımlarsak, Minkovski eşitsizliğinden, bu "mesafe kavramının da üçgen eşitsizliğini sağladığı kolaylıkla kanıtlanır. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. \spadesuit

* Erciyes Üniversitesi Matematik Bölümü öğrencisi.