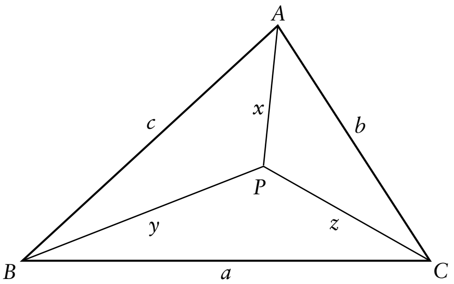
Geometri Köşesi

Mustafa Yağcı
yagcimustafa@yahoo.com

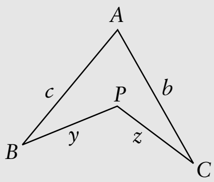
Fermat-Toricelli Noktası

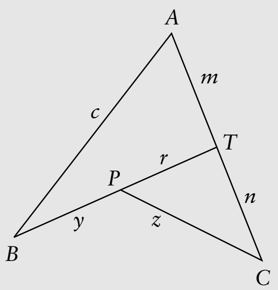
Üniversite sınavlarının geometri kısmıyla biraz olsun ilgilenen her öğrenci $u < x + y + z < 2u$ eşitsizliklerini görmüş olmalı. Bu eşitliksizlikler birçok üniversite hazırlık geometri kitabının ilk sayfalarını süsler. Ama önemli bir ayrıntı atlanır. Çoğu zaman yazar bile bu ayrıntının ayrımında değildir ve öğrencileri yanlış yönlendirir. Önce teoremi yazalım, sonra kanıtlayalım, ardından "önemli ayrıntı"ya değiniriz.



Teorem. *Kenar uzunlukları a, b, c olan bir ABC üçgeninin iç bölgesinde alınan bir P noktasının üçgenin köşelerine olan uzaklıkları x, y, z ise $x + y + z$ toplamı $a + b + c$ toplamından küçük ve bu toplamın yarısından büyüktür. Yani üçgenin çevresi olan $a + b + c$ toplamı kısaca $2u$ ile gösterilirse $u < x + y + z < 2u$ eşitsizlikleri geçerlidir.*

Önsav. Yandaki şekildeki gibi herhangi bir *$ABPC$ içbükey dörtgeninde $y + z < b + c$ dir.*





Kanıt: BP doğrusu, AC'yi T'de kessin. ABT üçgeninde üçgen eşitsizliğinden $y + r < c + m$, PTC üçgeninde üçgen eşitsizliğinden $z < r + n$. Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa, önsav elde edilir. □

Kanıt: P noktası üçgenin iç bölgesinde alındığından APB, APC ve BPC gerçek birer üçgen oluştururlar. O halde kenar uzunlukları gerçek birer üçgen oluşturabilecek şekilde olmalıdır, yani iki kenarın toplamı üçüncü kenardan büyük olmalıdır:

$$x + y > c,$$
$$x + z > b,$$
$$y + z > a.$$

Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa $2x + 2y + 2z > a + b + c = 2u$ bulunur ve böylece eşitsizliğin sol tarafı kanıtlanmış olur. Öte yandan,

$$b + c > y + z,$$
$$a + c > x + z$$
$$a + b > x + y$$

eşitsizlikleri toplanırsa (soldaki kareye bakınız) $a + b + c > x + y + z$ bulunur. Demek eşitsizliğin sağ tarafı da doğru. □

Eee, o zaman yanlış nerede? Buraya kadar yanlış yok. Yanlış üniversiteye hazırlık kitaplarında sorulan bir sorunun olası yanıtları arasında. Bu kanıtın ardından (hani eşitsizlik birkaç örnekle kavratılmalı ya!) soru geliyor:

Soru: *Kenar uzunlukları 5, 7 ve 8 birim olan bir üçgenin iç bölgesinde alınan bir noktanın köşelere olan uzaklıklarının toplamının alabileceği en küçük ve en büyük tamsayı değerlerini bulunuz.*

Kitaptaki Yanıt: *Önce çevreyi hesaplayalım:* $5 + 7 + 8 = 20$, *o zaman* $u = 10$. *Toplama s diyelim.* $10 < s < 20$ *olduğundan, s'nin alabileceği en küçük tamsayı değeri* 11, *en büyük tamsayı değeri ise* 19*'dur.*

Bakalım bu yanıtlar şıklarda var mı? Eveeet, E şıkkı!.. Ne kadar kolaymış!

Ama keşke yazar şıkları da doğru verseydi…

Bulunan eşitsizlik hatalı değil, $x + y + z$ toplamı her zaman u ile $2u$ arasındadır, bunu kanıtladık, ancak bu aralık, toplamın değişeceği en dar aralık olmayabilir. Yani toplamın en küçük tamsayı değeri, u'dan büyük en küçük tamsayı olmayabilir; en büyük değerin de $2u$'dan küçük en büyük tamsayı olmayabileceği gibi… Örneğin, verilen üçgende $x + y + z$ toplamı hep sabit bir sayı (örneğin 15) olabilir, olamaz mı? Ya da $x + y + z$ toplamı o üçgende 10'la 20 arasındadır ama, ne bileyim ben, mesela 15'ın altına inmez, 17'nin üstüne çıkmaz... Olabilir... Olamazsa da olamayacağı kanıtlanmalı...

Nitekim her üçgende P noktası üçgenin içinde değiştikçe $x + y + z$ toplamı u ile $2u$ arasındaki her değeri almaz, bunu birazdan bir örnekle göstereceğiz.

Sorunun yanıtının gerçekten E şıkkı olabilmesi için üçgenin kenar uzunlukları değil, çevresi verilmeli. Yani çevresi 20 olan **tüm** üçgenlerde $x + y + z$ toplamı P noktası üçgenin içinde değiştikçe 10 ile 20 arasındaki her değeri alır.

Verilmiş bir ABC üçgeninde, P noktası üçgenin içinde değiştikçe $x + y + z$ sayılarının aldığı değerler bir aralık oluştururlar[1], $[s, t]$, $(s, t]$, $[s, t)$ ya da (s, t) biçiminde bir aralık, çünkü P noktası "deliksiz" bir mekân olan ABC üçgeninde değişmektedir ve $x + y + z$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur. Yukarda kanıtladığımız teoreme göre $u \leq s \leq t \leq 2u$ olmalı. Ama s'nin u'ya, t'nin $2u$'ya eşit olabileceğini söyleyebilir miyiz?

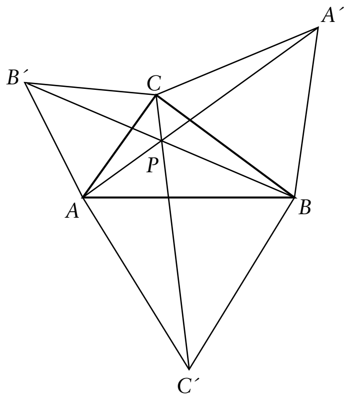
Bu ünlü problem, Pierre de Fermat (1565-1601) tarafından ortaya atılmıştır. Aslı şöyle:

Soru: *Her iç açının* 120°'*den küçük olan bir üçgenin iç bölgesinde alınan bir noktanın köşelere olan uzaklıkları toplamının en küçük olması için nokta nerede alınmalıdır*?

Böyle bir noktanın olmak zorunda olup olmadığını da şimdilik bilmediğimizi de ayrıca dikkatinize sunarız[2]...

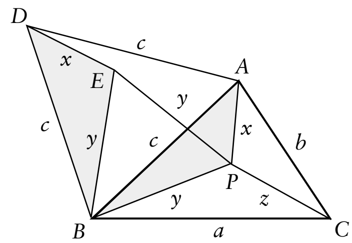
Yıllar sonra, Galileo'nun öğrencisi olan barometrenin mucidi Evangelista Toricelli (1608-1647) problemi çözmüş:

1 Matematiksel analizin bir sonucunun sonucudur bu.
2 Böyle bir noktanın varlığı da matematiksel analizden çıkar.



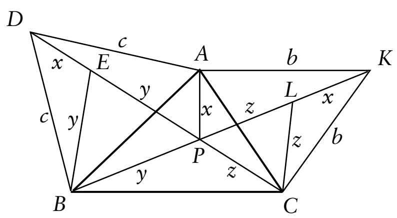
Teorem. *Bir ABC üçgeninde, köşelere olan uzaklıklarının toplamının en küçük olduğu nokta, üçgenin üç kenarı üzerinde üçgenin dışına doğru yandaki şekildeki gibi yerleştirilen eşkenar üçgenler için AA', BB', CC' doğrularının kesiştiği yerdir* [bu üç doğru kesişir!], *yani yukardaki şekildeki P noktasıdır. P noktasının ayrıca şu özelliği vardır*: $m(APB) = m(BPC) = m(CPA) = 120°$.

Bu P noktası bazı kaynaklarda **Fermat-Toricelli noktası** diye anılır.

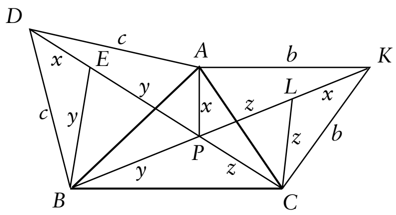


Kanıt: Üçgenin içinde herhangi bir P noktası alalım. a, b, c, x, y ve z yukarda tanımlanan ve yandaki şekilde gösterilen uzunluklar olsun. BP ve AB üzerlerine ABC üçgeninin dışına doğru birer eşkenar üçgen çizelim. Bu iki eşkenar üçgene sırasıyla BPE ve ABD diyelim. Şimdi, $BD = BA$, $BE = BP$ ve $m(DBE) = 60° - m(EBA) = m(ABP)$ eşitliklerinden $DBE = ABP$ çıkar. O halde $DE = AP = x$ olur. $DEPC$ kırık doğru parçasının boyunun $x + y + z$ olduğuna dikkat ediniz. Demek ki ABC üçgeni içinde alınan P noktası D, E, P, C noktalarını doğrusal yaparsa $x + y + z$ toplamı en küçük olur.

O halde soruyu çözülmüş gibi tekrar çizelim: ABC üçgeninin AB kenarı üzerine üçgenin dışına doğru ABD eşkenar üçgenini çizelim. C ve D köşelerini birleştirelim. CD üzerinde $m(BPC) = 120°$ olacak şekilde bir P noktası işaretleyelim. x, y ve z sayıları P noktasının sırasıyla A, B ve C noktalarına olan uzaklıkları olsun. $m(BPD) = 60°$ olduğundan, DP üzerindeki bir E



noktası için BPE eşkenar üçgenini oluşturabiliriz. D, E, P, C noktaları istediğimiz gibi doğrusal oldu. Aynen bir paragraf önce de yaptığımız gibi, $m(PBA) = 60° - m(ABE) = m(EBD)$, $PB = EB$ ve $AB = DB$ olduğundan $PBA = EBD$. O halde $AP = DE$. Demek ki $DC = x + y + z$.



Öte yandan $m(BPD) = 60° = m(BAD)$ olduğundan $BPAD$ bir kiriş dörtgenidir. Buradan $m(DPA) = m(DBA) = 60°$ bulunur. O halde $m(APC) = 120°$. Şimdi PC üzerine üçgenin dışına doğru bir PCL eşkenar üçgeni çizelim. $m(BPC) + m(CPL) = 120° + 60° = 180°$ olduğundan, B, P, L noktalarının doğrusal olduğuna dikkat ediniz. PL'yi L yönünde AP kadar uzatarak bir LK çizelim. $m(CLK) = 120° = m(CPA)$, $CL = CP$ ve $LK = PA$ olduğundan $CLK = CPA$. Dolayısıyla $CA = CK$. Bunun yanısıra, $m(LCK) = m(PCA) = 60° - m(ACL)$ olduğundan $m(ACK) = m(ACL) + m(LCK) = 60°$, ayrıca $CA = CK$ olduğundan ACK üçgeni de eşkenardır.

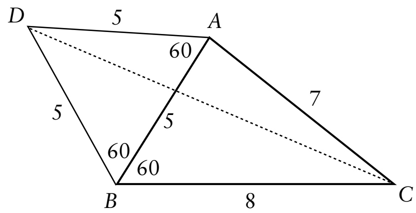
Aynı çizim BC kenarı üzerinde de yapılabilir.

Sonuç olarak DC ile BK doğrularının arakesiti olan P noktası istenen noktadır. □

Soru: ABC üçgeninin içaçılarının biri 120°'den büyük olduğunda da Fermat noktası, yani $AP + BP + CP$'nin en küçük değeri aldığı bir nokta (üçgenin dışında da olsa) vardır. Bu nokta geometrik olarak nasıl bulunur?

Doğru Yanıt. Biz bu noktayı **Fermat noktası** olarak anacağız ve F_1 ile göstereceğiz. Sonuçta $BK = CD = x + y + z$ olduğundan $x + y + z$ toplamının en küçük değeri sorulduğunda, BK veya CD'nin boyu hesaplanmalıdır.

Bu şekilden ayrıca neden üçgenin içaçılarının herbirinin 120°'den küçük olduğunun belirtildiğini anlayabiliyoruz. BAC açısının ölçüsünün 120° olması durumunda D, A, C ve B, A, K noktalarının doğrusal olacağına ve bu doğruların üçgenin A köşesinde kesişeceklerini, dolayısıyla noktamızın üçgenin iç bölgesinde olmayacağını anlıyoruz. BAC açısının 120°'den büyük olması durumunda ise Fermat noktası üçgenin dışında yer alıyor. Demek ki koşulları sağlayan noktanın üçgenin içinde bulunabilmesi, üçgenin içaçılarının herbirinin 120°'den küçük olması ile mümkün.



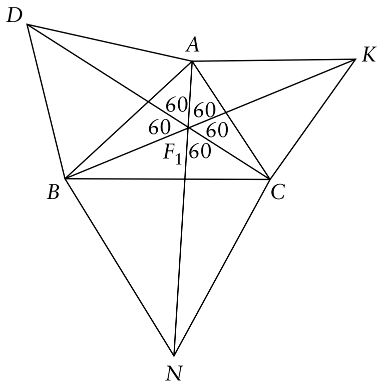
Şimdi, yukardaki şekildeki gibi kenar uzunlukları 5, 7, 8 olan bir ABC üçgeninde toplamın en küçük değerini hesaplayalım: ABC üçgeninde kosinüs teoremi gereğince $m(ABC) = 60°$ bulunur (kolay bir hesap, okura bırakıyoruz). ABD eşkenar üçgen olduğundan $m(DBA) = 60°$'dir, dolayısıyla $m(DBC) = 120°$'dir. DBC üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned} DC &= \sqrt{5^2 + 8^2 - 2\times\cos(120^\circ)\times 5\times 8} \\ &= \sqrt{5^2 + 8^2 + 5\times 8} = \sqrt{129} \approx 11,35 \end{aligned}$$

bulunur. Demek ki;

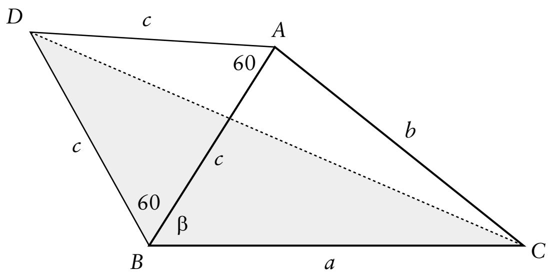
$$a + b + c \approx 11,35$$

yani, toplamın alabileceği en küçük tamsayı değeri 11 değil olsa olsa 12 olabilirmiş. Eğer üçgenin kenarlarını üçle çarpıp 15, 21, 24 alsaydık, doğru değeri kitap 35 yerine 31 bulacaktı, daha büyük bir yanılgı!



Gelelim toplamın en büyük değerine. Toplamın en büyük değere ulaştığı yer ise üçgenin en uzun iki kenarının kesiştiği köşedir [neden?] ama nokta üçgen içinde alınması gerektiğinden yani üçgenin üzerinde olamayacağından, bu köşeye mümkün olduğunca yakın alınmalıdır. O halde bu soru için $x + y + z < 7 + 8 = 15$ olduğunu anlıyoruz. Yani $x + y + z$ toplamının alabileceği en büyük tamsayı değeri de 19 değil 14 imiş.

Fermat Uzaklığını Hesaplamak. Fermat noktası bir üçgenin içinde AF_1B, BF_1C, CF_1A açılarının eşit olduğu tek noktadır. Bu bilgiden hareketle $x + y + z$ toplamının en küçük değeri (Fermat uzaklığı) bu üç üçgende kosinüs teoremi ve bir miktar çarpanlara ayırma kuralları uygulanarak da bulunabilir. Bulalım.



Kenar uzunlukları a, b, c, çevresi $2u$ ve alanı Δ olan bir ABC üçgeninde, üçgenin içindeki bir F_1 noktası için, en küçük $AF_1 + BF_1 + CF_1$ mesafesini bulacağız. Yukardaki şekilden izleyin. Amacımız CD'nin uzunluğunu bulmak.

ABC üçgeninde B açısının ölçüsü β olsun. Kosinüs teoreminden $\cos\beta = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$ bulunur. O halde

$$\sin\beta = \sqrt{1-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right)^2}\,.$$

Buradan,

$$\cos(\beta + 60°) = \cos\beta\cos 60° - \sin\beta\ \sin 60°$$

formülünün de yardımıyla, $\cos(\beta + 60^{o})$ kolayca hesaplanır:

$$\cos(\beta+60°) = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\,\frac{1}{2} - \sqrt{1-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right)^2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Şimdi DC uzunluğunu cosinus teoreminden kolaylıkla hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned}
DC^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta + 60^{o})\\
&= a^2+c^2-2ac\left[\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\,\frac{1}{2} - \sqrt{1-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right)^2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\\
&= a^2+c^2-\frac{1}{2}\left(c^2+a^2-b^2-\sqrt{(2ac)^2-(c^2+a^2-b^2)^2}\,\sqrt{3}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[a^2+b^2+c^2+\sqrt{(2ac+c^2+a^2-b^2)(2ac-c^2-a^2+b^2)}\,\sqrt{3}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[a^2+b^2+c^2+\sqrt{(a+c-b)(a+c+b)(b+a-c)(b-a+c)}\,\sqrt{3}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[a^2+b^2+c^2+\sqrt{2u(2u-b)(2u-c)(2u-a)}\,\sqrt{3}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[a^2+b^2+c^2+4\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}\,\sqrt{3}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[a^2+b^2+c^2+4\Delta\sqrt{3}\right].
\end{aligned}$$

Evangelista Toricelli

(Kenar uzunlukları a, b, c ve yarıçevresi u olan bir üçgensel bölgenin alanının

$$\Delta = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

olduğunu hatırlayınız.)

Sonuç olarak,

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+4\Delta\sqrt{3}}{2}} \le x+y+z \le \max\{a+b,\ a+c,\ b+c\}$$

bulunur.

Sonsöz. Fermat noktasının özelikleri aslında sayılacak gibi değil. 17inci yüzyıla kadar üçgende, ağırlık merkezi (G), diklik merkezi (H), içteğet çember merkezi (I) ve çevrel çember merkezi (O) olmak üzere sadece dört özel nokta bilindiğinden ve uzun zamandan beri bulunan ilk nokta olduğundan bayağı bir kıymetli olmuş. Gerçi şimdi üçgende binden fazla özel nokta bilindiğinden pek kıymeti yok gibi ama hâlâ biz öğretmenlerin 17inci yüzyılda kalmış olması da ne acı.

Bir sonraki sayıda benzer biçimde yapılan bir başka yaygın hataya değineceğiz. ♠