Doğuş Üniversitesi Matematik Kulübü Matematik Yarışması / 3. Bölüm

Doğuş Üniversitesi Matematik Kulübü'nün üniversitenin öğretim üyelerinin de katkısıyla düzenlediği liselerarası matematik yarışmasının sorularını yayımlamayı sürdürüyoruz. Önceki sayılarımızda Fen Lisesi öğrencilerine sorulan soruları ve bu soruların yanıtlarını yayımlamıştık. Geçen sayımızda liselilere sorulan soruları yayımlamıştık. Şimdi de liselilere sorulan soruları ve yanıtlarını yayımlıyoruz.

1) *Bir doğal sayıyı* 5, 7 *ve* 9 *sayılarına böldüğümüzde sırasıyla* 3, 5 *ve* 6 *kalanlarını veriyor. Bu sayılardan en küçüğü kaçtır?*

Çözüm: Sayımıza A diyelim. $A = 5k + 3 = 7m + 5$ olduğundan, $A + 2$, 5'e ve 7'ye, dolayısıyla 35'e bölünür, demek ki belli bir l tamsayısı için, $A + 2 = 35l$. Bu l tamsayısının koşuları sağlayan en küçük değerini bulmalıyız. Verilenlerden, ayrıca, belli bir n için $A = 9n + 6$ çıkar. Demek ki $35l - 2 = 9n + 6$, yani $n = (35l - 8)/9$. Dolayısıyla n'nin tamsayı olması için, l'nin en küçük değeri 1'dir. Böylece $A = 35l - 2 = 33$ bulunur.

Not: Genel durum için Çin Kalan Teoremi'ne bakmanızı öneririz.

2) x, y, z *pozitif tamsayılar ve* $3x + 2y + z = 97$ *olduğuna göre*, y*'nin en büyük değeri kaçtır?*

Çözüm: $3x + z$ en küçük ve tek sayı olmalı. Bu ise $x = 1$ ve $z = 2$ durumunda mümkündür. Demek ki $y = (97 - 3x - z)/2 = 46$.

3) $x^2 + (m + 1)x + 1 = 0$ *denkleminin negatif iki farklı kökü olması için* m *ne olmalıdır?*

Çözüm: Denklemin iki negatif kökü olduğundan, $m + 1 > 0$. Ayrıca denklemin iki değişik kökü olduğundan, $0 < \Delta = (m + 1)^2 - 4 = m^2 - 2m - 3 = (m + 1)(m - 3)$ olmalı. $m > -1$ olması gerektiğinden, ikinci eşitlik çözüldüğünde $m > 3$ bulunur.

4) $3f(x) + f(1 - x) = x$ *ise* $f(3)$*'ün değeri nedir?*

Çözüm: Denklemi $x = 3$'e ve -2'ye uyguladığımızda, $3f(3) + f(-2) = 3$ ve $3f(-2) + f(3) = -2$ denklemleri bulunur. Bu denklemlerden $f(3) = 11/8$ bulunur.

5) $x + 7y = -3$ *ise* $16(x + y)^2 - 24(x^2 - y^2) + 9(x - y)^2$ *kaçtır?*

Çözüm: $16(x+y)^2 - 24(x^2-y^2) + 9(x - y)^2 = [4(x+y) - 3(x-y)]^2 = (x + 7y)^2 = (-3)^2 = 9$.

6) a, b, c *farklı pozitif tamsayılar ve* $\frac{a+b}{b} > 4$, $\frac{b+c}{c} < 5$ *olduğuna göre,* $a + b + c$ *toplamının en küçük değeri kaçtır?*

Çözüm: Birinci koşuldan, $a/b + 1 > 4$, yani $a > 3b$ çıkar. İkinci koşuldan $b/c + 1 < 5$, yani $b < 4c$ çıkar. b'nin alabileceği en küçük değer 1'dir, öyle olsun: $b = 1$ alalım. O zaman a ve c'nın alabilecekleri en küçük değerler $a = 4$ ve $c = 2$'dir. Böylece $a + b + c = 7$.

7) *Boyutları* 160, 240 *ve* 320 *cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki bir depoya küp şeklindeki kutular yerleştiriliyor. Buna göre depoya en az kaç tane kutu yerleştirilebilir?*

Çözüm: OBEB(160, 240, 320) = 80 olduğundan, kutuların sayısı $2 \times 3 \times 4 = 24$ olmalıdır.

8) $a + \frac{3}{4b} = 2$ *ve* $\frac{3}{4a} + b = 6$ *olduğuna göre* b/a *oranı nedir?*

Çözüm: Denklemler sırasıyla,

$$\frac{4ab+3}{4b} = 2 \text{ ve } \frac{4ab+3}{4a} = 6$$

biçiminde yazılır. Taraf tarafa bölerek, $b/a = 6/2 = 3$ bulunur.

9) $y = 2x^2 - 5x + 1$ *ve* $y = x^2 - 3$ *parabollerinin kesim noktalarından geçen doğrunun denklemi nedir?*

Birinci Çözüm: Doğrunun denklemi

$$(2x^2 - 5x + 1 - y) + 2(y - x^2 + 3) = 0$$

farkından bulunabilir. Bu işlemin sonucunda aranan doğrunun denklemi $y = 5x - 7$ olur.

İkinci Çözüm: $y = 2x^2 - 5x + 1$ *ve* $y = x^2 - 3$ denklemlerini çözelim: $2x^2 - 5x + 1 = x^2 - 3$, yani $x^2 - 5x + 4 = 0$, buradan da $x = 1$ ve $x = 4$ bulunur. Demek ki $(1, -2)$ ve $(4, 13)$ parabollerin kesişim noktalarıdır. Bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi

$$\frac{13-(-2)}{4-1} = 5$$

tir, dolayısıyla doğrunun denklemi $y = 5x + b$ biçimindedir. Bu doğrunun $(1, -2)$ noktasının geçmesi için $b = -7$ olmalıdır. Demek ki doğrunun denklemi $y = 5x - 7$'dir.

10) *ab ve ba iki basamaklı sayılardır.*

$$\frac{ab+ba}{ab-ba} = \frac{22}{3}$$

ise a kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{22}{3} = \frac{ab+ba}{ab-ba} = \frac{10a+b+10b+a}{10a+b-10b-a} = \frac{11(a+b)}{9(a-b)},$$

buradan da $a + b = 6(a - b)$ ve $5a = 7b$ bulunur. O halde $a = 7$ ve $b = 5$ olmalıdır.

11) $$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{2}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

işleminin sonucu nedir?

Çözüm: Pay ve paydaları paydaların eşlenikleriyle çarparak,

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{2}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1} + \frac{2(2-\sqrt{2})}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{1} = 4$$

elde ederiz.

12) *Aşağıdaki denklem sisteminin çözüm kümesinin boşküme olmaması için a kaç olmalıdır?*

$3x + y = 10$

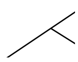
$2x - 3y = 3$

$ax + (a - 1)y = 19$

Çözüm: İlk iki denklemden $x = 3$, $y = 1$ çıkar. Bu çözümü ikinci denkleme yerleştirirsek, $3a + (a - 1) = 19$ çıkar, yani $a = 5$ bulunur.

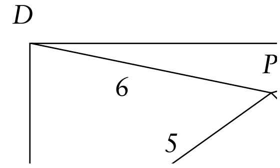
13) *Aşağıdaki şekildeki üçgende $AB = AC$ olduğuna göre x açısı kaç derecedir?*

Çözüm: ABC üçgeni ikizkenar olduğundan, $m(ACB) = m(ABC)$



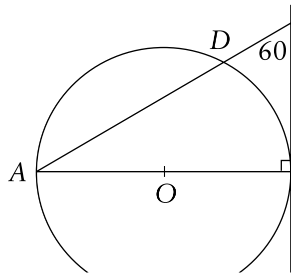
$= 65^o$. Buna göre $(65 - m) + m + x = 180^o$. Dolayısıyla x açısı $180 - 65 = 115$ bulunur.

14) *$ABCD$ dikdörtgeninde P herhangi bir nokta olmak üzere, verilenlere göre x nedir?*



Çözüm: $x^2 + 5^2 = 6^2 + (\sqrt{7})^2$ eşitliğinden, $x^2 = 18$, buradan da $x = 3\sqrt{2}$ bulunur.

15) *CE doğrusu B noktasında O merkezli çembere teğettir.* $BC = 8$ ve $m(DCB) = 60^o$ *olduğuna göre AD/CD oranı nedir?*



Çözüm: $m(ADB) = 90^o$ olduğundan, $m(BDC) = 90^o$, dolayısıyla BDC üçgeninden $DC = 8\cos(60^o) = 4$ elde ederiz. Öte yandan, $m(ABC) = 90^o$ olduğundan, $AC = 8/\cos(60^o) = 16$. Demek ki $AD = AC - DC = 16 - 4 = 12$ ve $AD/CD = 12/4 = 3$.

16) $M = \{x \in Z : 1/16 \le 2^x < 15\}$ *kümesinin üç elemanlı kaç altkümesi vardır?*

Çözüm: $M = \{x \in Z : 2^{-4} \le 2^x < 2^4\} = \{x \in Z : -4 \le x < 4\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ olduğundan, M'nin sekiz elamanı vardır. Demek ki üç elemanlı altküme sayısı

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!-5!} = 56$$

dir.

17) $x + y = 2$ *ve* $x^3 + y^3 = 5$ *ise* $x^2 + y^2$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

Çözüm: $8 = 2^3 = (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 5 + 6xy$ olduğundan, $xy = 1/2$'dir. Dolayısıyla, $4 = 2^2 = x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 1$ ve $x^2 + y^2 = 3$.

18) *3'le çarpıldığında bir küp, 5'le çarpıldığında bir kare elde edilen en küçük doğal sayı nedir?*

Çözüm: Bu sayıya A diyelim. $A = 3^x5^y$ şeklinde yazılmalıdır. $3A$ bir küp olduğundan, $x + 1$ ve y sayıları 3'e bölünürler. $5A$ bir kare olduğundan x ve $y + 1$ çifttir. Bu koşulları sağlayan en küçük sayılar $x = 2$ ve $y = 3$'tür. Demek ki $A = 3^25^3 = 1125$.

19) $P(x) = x^{\frac{n+10}{4}} + x^{n-3} + x - 1$

polinomunun derecesi en küçük iken P(−2) kaçtır?

Çözüm: $P(x)$'in polinom olması için $n \geq 3$ olmalı ve 4, $n + 10$'u bölmeli. Bu koşulları sağlayan en küçük n, 6'dır. Demek ki $P(x) = x^4 + x^3 + x - 1$ ve $P(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 + (-2) - 1 = 16 - 8 - 2 - 1 = 5$.

20) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{|x+2| - 3} \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan kaç tamsayı vardır?

Çözüm: Verilen eşitsizlik

$$\frac{(x-2)^2}{|x+2| - 3} \leq 0$$

şeklinde yazılabilir. Demek ki ya $x = 2$ ya da $|x + 2| - 3 < 0$ olmalı. İkinci koşulu irdeleyelim: $|x + 2| < 3$, yani $-3 < x + 2 < 3$, yani $-5 < x < 1$, yani $x = -4, -3, -2, -1, 0$. Demek ki altı tamsayı çözümü var.

21) *A torbasında* 4 *beyaz,* 3 *kırmızı; B torbasında da* 3 *beyaz,* 2 *kırmızı top vardır. B torbasından bir top çekilip rengine bakılmadan A torbasına atılıyor. Sonra da A torbasından bir top çekiliyor. Çekilen topun kırmızı olma olasılığı nedir?*

Çözüm: B torbasından 3/5 olasılıkla beyaz top çekilip A torbasına eklenecektir ve bu durumda A torbasından kırmızı top çekme olasılığı 3/8 olacaktır. B torbasından 2/5 olasılıkla kırmızı top çekilip A torbasına eklenecektir ve bu durumda A torbasından kırmızı top çekme olasılığı 4/8 olacaktır. Demek ki olasılık $(3/5)\times(3/8) + (2/5)(4/8) = 17/40$'tır.

22) *Bir torbada* 1'*den* 10'*a kadar numaralandırılmış on top vardır. Rastgele alınan iki topun numaraları toplamının* 15'*ten büyük olma olasılığı nedir?*

Çözüm: Numaralar (10,6), (10,7), (10,8), (10,9), (9,7), (9,8) olabilir. Demek ki altı durumda toplam 15'ten büyük oluyor. Herbir durumun olasılığı $2 \times 1/10 \times 1/9$, ya da

$$\frac{1}{\binom{10}{2}},$$

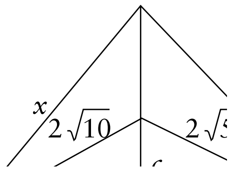
yani 1/45. Demek ki olasılık 6/45, yani 2/15'tir.

23) $2/x = 3/y = 4/z$ *ve* $2x + 3y - 4z = -12$ *olduğuna göre x, y ve z sayılarının aritmetik ortalaması nedir?*

Çözüm: $\dfrac{2}{x} = \dfrac{3}{y} = \dfrac{4}{z} = \dfrac{4+9-16}{2x+3y-4z} = \dfrac{-3}{-12} = \dfrac{1}{4}$

eşitliklerinden, $x = 8$, $y = 12$, $z = 16$ bulunur. Dolayısıyla ortalama $(8 + 12 + 16)/3 = 36/3 = 12$'dir.

24) *Aşağıdaki şekilde x kaçtır?*

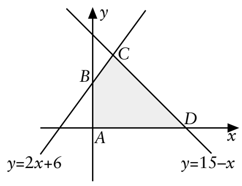


Çözüm: $AD = a$, $DB = b$, $CD = h$ olsun. Pisagor Teoremi'nden, $a^2 + c^2 = 40$ ve $b^2 + c^2 = 20$ çıkar. Demek ki $a^2 - b^2 = 20$.

Gene Pisagor Teoremi'nden, $a^2 + h^2 = x^2$ ve $b^2 + h^2 = 80$ çıkar. Demek ki $a^2 - b^2 = x^2 - 80$.

Son iki paragraftan $20 = x^2 - 80$, yani $x = 10$ çıkar.

25) *Yandaki şekilde,* $y = 15 - x$ ve $y = 2x + 6$ *doğruları verilmiştir. ABCD dörtgeninin alanı kaç birim karedir?*



Çözüm: C noktasının koordinatlarını bulmak için $y = 15 - x$ ve $y = 2x + 6$ denklemlerini çözmeliyiz. Kolayca $C = (3, 12)$ bulunur. Bunun gibi $D = (15, 0)$ ve $B = (0, 6)$ bulunur. $y = 2x + 6$ doğrusu da x eksenini $(-3, 0)$ noktasında keser. Demek ki alan, $12\times(15+3)/2 - 3\times6/2 = 108 - 9 = 99$'dur.

26) $(x - 1/x^{1/2})^{12}$ *ifadesinin açılımında sabit sayı kaçtır?*

Çözüm:

$$(x - 1/x^{1/2})^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^k (-x^{-1/2})^{12-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{12} (-1)^{12-k} \binom{12}{k} x^{k-6+k/2}$$

eşitliğinden, sabit sayının $k - 6 + k/2 = 0$ denkleminin çözümünden yani $k = 4$'ten geldiği anlaşılır. Dolayısıyla sabit terim

$$(-1)^{12-4}\binom{12}{4} = \frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2} = 495\text{'dir.}$$

27) *Reel sayılarda her* x, y *için*, $x * y = 2x + 2y - 4xy - 1/2$ *olarak tanımlanan* $*$ *işleminde* 1*'in tersi var mıdır ve varsa kaçtır?*

Çözüm: Önce etkisiz elemanın olup olmadığına bakalım. İşlem değişmeli olduğundan, öyle bir $e \in \mathsf{R}$ arıyoruz ki, her $x \in \mathsf{R}$ için, $x * e = x$ olsun, yani $2x + 2e - 4xe - 1/2 = x$ olsun. Bundan $2e(1 - 2x) = 1/2 - x = (1 - 2x)/2$, yani $e = 1/4$ çıkar. Demek ki $e = 1/4$ işlemin etkisiz elemanı. Şimdi $1 * y = e = 1/4$ denklemini, yani $2 + 2y - 4y - 1/2 = 1/4$ denklemini çözmeliyiz. Kolay bir hesapla $y = 5/8$ bulunur.

28) $27^{1/x+1} + 3^{3/x} > 252$ *eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?*

Çözüm: $252 < 27^{1/x+1} + 3^{3/x} = 27 \times 27^{1/x} + 3^{3/x} = 27 \times 3^{3/x} + 3^{3/x} = 28 \times 3^{3/x}$ eşitsizliğinden $3^{3/x} > 252/28 = 9 = 3^2$ çıkar, bundan da $3/x > 2$ çıkar. Dolayısıyla $x > 0$ olmalı. Şimdi eşitliği değiştirmeden x'le çarpabiliriz: $0 < x < 3/2$ bulunur. Çözüm kümesi $(0, 3/2)$ açık aralığıdır.

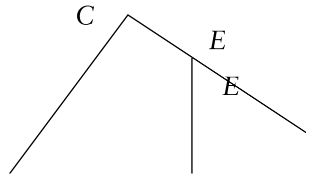
29) $y + 7 = 3x$ *ve* $2y = x + 4$ *doğruları arasındaki dar açı kaç derecedir?*

Çözüm: Doğruların eğimleri 3 ve 1/2 olduğundan, açıya θ dersek,

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)} = 1$$

bulunur, yani $\theta = 45^{\circ}$.

30) *Yandaki şekilde* $m(ACB) = 90^{\circ}$, $AD = BD$, $DE \perp AB$, $AB = 20$ *ve* $AC = 12$ *birimdir.* $ADEC$ *dörtgenini alanı kaçtır?*



Çözüm: Pisagor Teoremi'nden $CB^2 + AC^2 = AB^2$, yani $CB = 16$ bulunur. Demek ki ABC üçgeninin alanı $12 \times 16/2 = 96$'dır.

Ayrıca $DB = AD$ olduğundan, $DB = AB/2 = 10$.

Şimdi, ABC ve EBD üçgenlerinin benzerliğinden hareketle, $DE/12 = DE/AC = DB/BC = 10/16$, yani $DE = 12 \times 10/16 = 15/2$ bulunur. Dolayısıyla EDB üçgeninin alanı $(15/2) \times 10/2 = 75/2$'dir.

Demek ki $ADEC$ dörtgeninin alanı, $96 - 75/2 = 117/2$'dir. ♣

Cauchy'nin Bir Eşitsizliği

Afkan Aslanov* / *aaslanov@fatih.edu.tr*

Matematik Dünyası, 2003 Güz sayısında Cauchy'nin bir eşitsizliği kanıtlanmış, daha doğrusu sade ve güzel bir eşitsizliğin matematik tarihinde mümkün olabilecek en zor kanıtları verilmiştir. Böyle kanıtları ne matematiksel açıdan ne de pedagojik bakımından doğru buluyoruz. Eğer bir şey daha kolay anlatılabiliyorsa onun yapay şekilde zor anlaşılır hale getirilmesinin kimseye yararı olmaz, hatta zararı olabilir. Bu yazıda aynı eşitsizliğin daha kolay bir kanıtını vereceğiz.

Teorem 1 (Cauchy). *Eğer* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *gerçel sayılarsa,*

$$\left(\sum_{i=1}^n r_i\right) \le n\sum_{i=1}^n r_i^2$$

eşitsizliği doğrudur.

Kanıt: İki r ve s gerçel sayısı için, $r^2 - 2rs + s^2 = (r - s)^2 \ge 0$ olduğundan, $rs \le (r^2 + s^2)/2$ eşitsizliği geçerlidir. Bundan da hemen,

$$\left(\sum_{i=1}^n r_i\right)^2 = \sum_{j,k=1}^n r_j r_k \le \sum_{j,k=1}^n \frac{r_j^2 + r_k^2}{2} = n\sum_{i=1}^n r_i^2$$

eşitsizliğini elde ederiz. □ ♣

* Fatih Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.