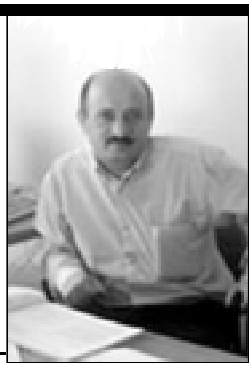
Problemler ve Çözümleri



Refail Alizade*
rafailalizade@iyte.edu.tr

Bu, bir yıl sürecek bir yarışmadır. Grup halinde, okul olarak ya da bireysel olarak katılabilirsiniz.

Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Ayrıca lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

Her sorunun çözümünü ayrı bir kâğıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenciyseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla İzmir adresine 15 Mayıs 2004 tarihine kadar adıma gönderiniz.

Doğru yanıt yollayanlar:

Alper Çay (Erciyes Üniversitesi Matematik Bölümü, Kayseri) Y281, Y282, Y285.

Oktay Balkış (Aksaray Anadolu Öğretmen Lisesi), Sinan Karal (Özel Kazımoğlu Fen Lisesi, İstanbul), Mustafa Dönmez (Turgutlu Halil Kale Fen Lisesi), Yaşar Dönmez (Turgutlu Lisesi) Y281, Y285.

Aras Erzurumluoğlu (İstanbul Lisesi) Y281, Y284.

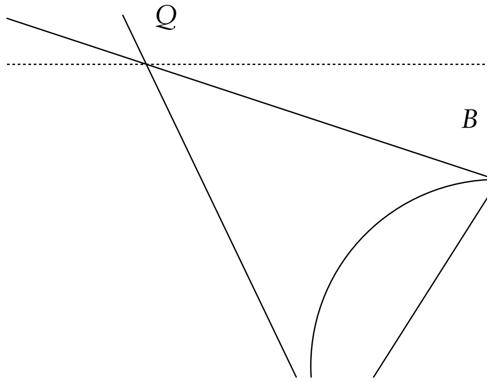
Enes Dinçer (Seyhan, Adana) Y281.

Osman Arşın (İzmir), Ayşe Borat (Ege Üniversitesi, Matematik Bölümü) Y285.

Alıştırma Problemleri

A291. a ve b pozitif tamsayılarından herbirinin 99'ar pozitif tam çarpanı bulunur. $a{\times}b$ sayısının pozitif tam çarpanlarının sayısı 1000 olabilir mi?

A292. Çember üzerinde, $|AB| = |BD|$ olmak üzere A, B, C, D noktaları alınmıştır. A noktasından geçen teğet BC doğrusunu Q noktasında kesiyor. AB ve CD doğruları R noktasında kesişiyor. QR doğrusunun AD'ye paralel olduğunu kanıtlayınız. (Şekle bakınız.)



A293. 10×19 boyutlu tablonun her hanesine 0 veya 1 yazılmıştır. Her satır ve her sütunun sayılarının toplamları arasında birbirinden farklı en fazla kaç sayı olabilir?

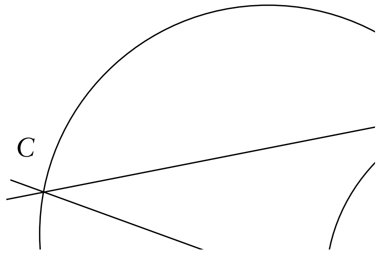
A294. $x^2 + ax + b = 0$ denkleminin birbirinden farklı iki gerçel kökü vardır. $x^4 + ax^3 + (b - 2)x^2 - ax + 1 = 0$ denkleminin birbirinden farklı dört kökü olduğunu kanıtlayınız.

A295. Herbiri diğer üçünden ikisinin çarpımına eşit olan, tüm gerçel sayı dörtlülerini bulunuz.

Yarışma Problemleri

Y291. m ve n pozitif tamsayıları OBEB(m, n) + OKEK$(m, n) = m + n$ eşitliğini sağlar. Bu sayılardan birinin diğerine bölündüğünü kanıtlayınız.

Y292. İki çember A ve B noktalarında kesişiyor. Birinci çemberin AC kirişi ikinci çembere teğettir, ikinci çemberin AD kirişi de birinci çembere teğettir. CD doğrusu birinci çemberi, B'den farklı olan M noktasında kesiyor. MB doğrusunun AD doğru parçasını yarıya böldüğünü kanıtlayınız.



Y293. İki kişi sırayla satranç tahtasının boş hanelerine birer at koyuyor: birinci kişi beyaz, ikinci kişi siyah at. Yeni konulan her atın karşı renkten atlarlarla tehdit edilmemesi gerekir. Hamle yapamayan kaybeder. En

* İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü öğretim üyesi.

iyi şekilde oynadıkları taktirde kim kazanır, başlayan mı, ikinci oyuncu mu?

Y294. $a < b$ ve her gerçel x için $ax^2 + bx + c \geq 0$ olmak üzere tüm a, b, c gerçel sayı üçlüleri için

$$\frac{a+b+c}{b-a}$$

sayısının alabileceği minimum değeri bulunuz.

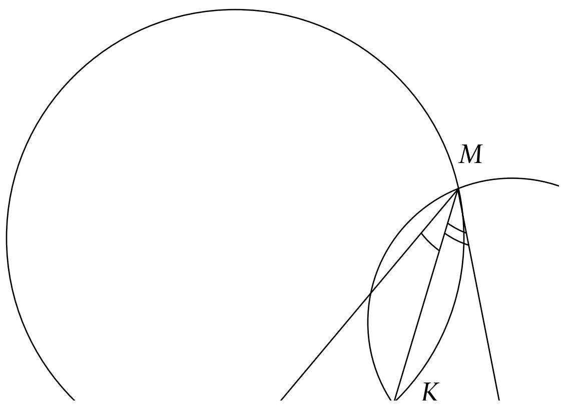
Y295. 2004 kentli bir ülkede her kentin en az 400 kentle doğrudan bağlantısı bulunuyor ve her kentten herhangi bir diğerine ulaşmak mümkündür. En fazla 14 aktarmayla herhangi bir kentten herhangi bir kente ulaşılabileceğini kanıtlayınız.

Eski Sorulara Çözümler (2003-II)

A281. *Negatif olmayan a, b ve c tamsayıları $28a + 30b + 31c = 365$ eşitliğini sağlar. $a + b + c = 12$ eşitliğini kanıtlayınız.*

Çözüm. Eğer $a + b + c \leq 11$ olsaydı, $365 = 28a + 30b + 31c \leq 31(a + b + c) \leq 31 \times 11 = 341$ olacaktı, ki bu imkânsız. Öte yandan, eğer $a + b + c \geq 13$ olsaydı, $365 = 28a + 30b + 31c = 28(a + b + c) + 2b + 3c \geq 364 + 2b + 3c$ olacaktı, ki bu da imkânsız. Böylece $a + b + c = 12$ olmak zorunda. Verilen denklemi sağlayan tam üç çözüm var: $c = 12 - a - b$ alarak görüleceği üzere, $(a, b, c) = (0, 7, 5)$, $(1, 4, 7)$ ve $(2, 1, 9)$ denklemin çözümleridir.

A282. *M ve K noktalarında kesişen iki çemberin bir ortak teğeti çizilmiştir. A ve B teğetin değme noktaları ise, $m(AMB) + m(AKB) = 180°$ olduğunu gösteriniz.*



Çözüm. Aynı yayları gördüklerinden (yukardaki şekle bakınız), $m(KAB) = m(AMK)$ ve $m(KBA) = m(BMK)$'dır. O halde $m(AMB) + m(AKB) = m(KAB) \times m(KBA) \times m(AKB) = 180°$'dir.

A283. *$A = \{1, 2, 3\}$ olsun. Her $x \in A$ için $f(f(f(x))) = x$ eşitliğini sağlayan kaç $f : A \to A$ fonksiyonu vardır.*

Çözüm. f^3 birim fonksiyon olduğundan, f birebir ve örtendir. Her $x \in A$ için $f(x) = x$ olarak tanımlanan birim fonksiyonu koşulu sağlar. $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$ olsun. Koşulu sağlayan bir f fonksiyonu için, $f(a) = b$ ise, $f(b) = a$ olamaz, çünkü bu durumda $f(f(f(a))) = b \neq a$ olur. f birebir olduğundan $f(b) = b$ de olamaz. Dolayısıyla $f(b) = c$ olmak zorunda. Aynı nedenden $f(c) = a$ olmak zorunda. O halde birim fonksiyonu dışında sadece iki fonksiyon koşulu sağlar:

1) $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$, ve
2) $f(1) = 3$, $f(3) = 2$, $f(2) = 1$.

Böylece koşulu sağlayan tam üç fonksiyon bulunur.

A284. *Ayşe ve Betül aynı anda, aynı yerden yola çıkıyorlar ve aynı yönde gidiyorlar. Ayşe yürüyor, Betül koşuyor. Betül 400 adım koştuktan sonra geriye dönüyor. Bu anda Ayşe adımlarını saymaya başlıyor ve 100 adım attıktan sonra Betül'le karşılaşıyor. Hangisinin adımları daha uzundur?*

Çözüm. Ayşe ve Betül'ün adım uzunlukları sırasıyla a ve b olsun. Eşit sürede Betül'ün attığı adım sayısının Ayşe'ninkine oranı γ olsun. Betül'ün geri dönerken attığı adım sayısı 400'den az; ayrıca Betül'ün geri dönerken harcadığı sürede Ayşe 100 adım atıyor. Verilenlerden $400b = 400a/\gamma + 100a + 100b\gamma$ denklemi elde edilir. Buradan da $(4 - \gamma)b = (4/\gamma + 1)a$, dolayısıyla $4 - \gamma > 0$ ve

$$\frac{b}{a} = \frac{4+\gamma}{\gamma(4-\gamma)}$$

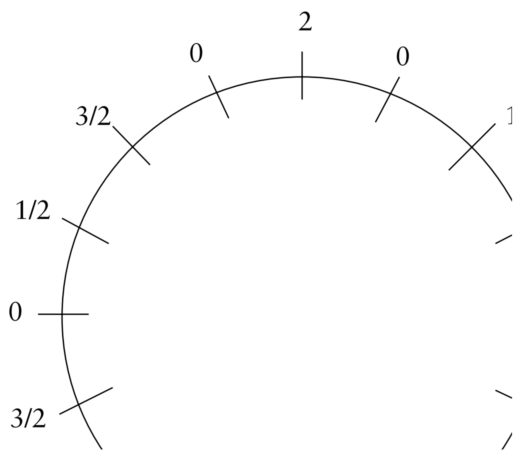
elde edilir. Demek ki, $b/a > 1$ ancak ve ancak

$$\frac{4+\gamma}{\gamma(4-\gamma)} > 1$$

yani ancak ve ancak $\gamma^2 - 3\gamma + 4 > 0$ doğruysa, ki bu son eşitsizliğin doğruluğunu kanıtlamak kolay. Sonuç olarak, Betül'ün adımları daha uzundur.

A285. *$a_1, a_2, ..., a_{16}$ gerçel sayıları çember boyunca yazılmıştır. Ardarda gelen her üç sayının toplamı 2'den küçük değil, ardarda gelen her beş sayının toplamı da 4'ten büyük değil. $a_1 - a_2$ farkının alabileceği en büyük değeri bulunuz.*

Çözüm. $S = a_1 + a_2 + ... + a_{16}$ olsun. $a_2 + a_3$



$+ a_4 \geq 2$, $a_5 + a_6 + a_7 \geq 2$, ..., $a_{14} + a_{15} + a_{16} \geq 2$ eşitsizliklerinden $S \geq a_1 + 10$ elde edilir. $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 4$, $a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} \leq 4$, $a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_1 \leq 4$ eşitsizliklerinden $S \leq a_2 + 12$ elde edilir. O halde $a_1 + 10 \leq a_2 + 12$ eşitsizliğinden $a_1 - a_2 \leq 2$ elde edilir. Diğer taraftan $a_1 = 2$, $a_2 = a_5 = a_8 = a_{13} = a_{16} = 0$, $a_3 = a_{11} = a_{14} = 1/2$, $a_4 = a_{12} = a_{15} = 3/2$, $a_6 = a_7 = a_9 = a_{10} = 1$ alınarak $a_1 - a_2 = 2$ olabileceği gösterilebilir.

Y281. *$n^2 - 5n + 7$ sayısının bir tamsayının karesine eşit olmasını sağlayan tüm n tamsayılarını bulunuz.*

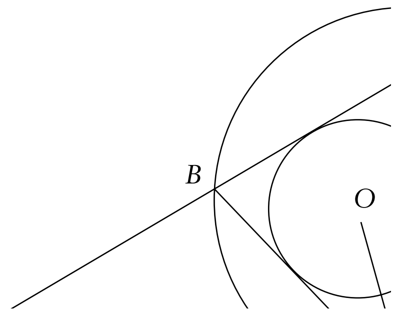
Birinci Yöntem. $n^2 - 5n + 7 = x^2$ olsun. Denklemin 4'le çarpımını alalım: $4n^2 - 20n + 25 + 3 = 4x^2$. Buradan $(2n - 5)^2 + 3 = (2x)^2$ veya $(2x - 2n + 5)(2x + 2n - 5) = 3$ elde edilir. Dolayısıyla

$$(2x - 2n + 5, 2x + 2n - 5)$$

tamsayılar ikilisi dört farklı değer alabilir: (1, 3), (3, 1), (–1, –3), (– 3, –1). İlk durumda $2x - 2n + 5 = 1$ ve $2x + 2n - 5 = 3$ denklemlerinin toplamından $4x = 4$ veya $x = 1$, ikinci denklemden de $n = 3$ elde edilir. Diğer üç durum da benzer şekilde incelenerek $(x, n) = (1, 2), (-1, 2), (-1, 3)$ kökleri elde edilir. Böylece koşulu sağlayan durumlar $n = 2$ ve $n = 3$'tür.

İkinci Yöntem. $n > 3$ durumunda şu eşitsizlikler sağlanır: $(n - 3)^2 = n^2 - 6n + 9 < n^2 - 5n + 7 < n^2 - 4n + 4 = (n - 2)^2$. İki ardışık tamsayının kareleri arasında başka bir tamsayının karesi bulunamayacağından bu durumda $n^2 - 5n + 7$ bir tamkare olamaz. Benzer şekilde $n < 2$ durumunda $(n - 2)^2 < n^2 - 5n + 7 < (n - 3)^2$ eşitsizliği sağlandığından $n^2 - 5n + 7$ bir tamkare olamaz. $n = 2$ ve $n = 3$ durumunda $n^2 - 5n + 7$ sayısının bir tamkare olduğu kolayca kontrol edilir.

Y282. *Bir açı kenarı üzerinde bir A noktası alınmıştır. Açının kenarına A noktasında teğet olan ve açının diğer kenarını kesen (kesişim noktaları B ve C olsun) tüm çemberleri alalım. Böyle elde edilmiş tüm ABC üçgenlerinin içteğet çemberlerinin merkezlerinin aynı doğru üzerinde bulunduğunu kanıtlayınız.*



Çözüm. Sorudaki ABC üçgenlerinden herhangi birinin içteğet çemberinin merkezini O, açının köşesini D ile gösterelim (yukardaki şekil). AB yayının değerinin yarısına eşit olduklarından, $m(BAD) = m(DCA)$. O noktasının ABC üçgeninin açıortaylarının kesişim noktası olduğunu da göz önünde bulundurursak, $m(OAD) = m(OAB) + m(BAD) = m(BAC)/2 + (m(BAD) + m(DCA))/2 = (m(DAC) + m(DCA))/2 = (180° - m(ADC))/2$ elde edilir. Dolayısıyla $m(OAD)$, ABC üçgeninin seçiminden bağımsız olup sadece $m(ADC)$'ye bağlıdır. Başka bir deyişle tüm O noktaları DA doğrusu ile $90° - m(ADC)/2$'ye eşit bir açı oluşturan doğrunun üzerindedir.

Y283. *Doğru üzerinde (yani doğrunun noktalarından oluşan)* 100 *küme verilmiştir:* $A_1, A_2, ..., A_{100}$. *Bu kümelerden herbiri* 100 *ayrık aralığın birleşimidir.* $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{100}$ *kümesinin en fazla* 9901 *ayrık aralığın birleşimi olarak yazılacağını gösteriniz.*

Çözüm. Aralıkların uçlarını birbirinden uzak ve aralıkları kapalı almakla bir şey kaybetmeyiz, bundan böyle aralıklar böyle olsunlar. A kümesi a ayrık aralıktan, B kümesi b ayrık aralıktan oluşmuş olsun. $A \cap B$ kümesi de k aralıktan oluşmuş olsun. Demek ki $A \cap B$ kümesinde $2k$ tane aralık ucu vardır. $A \cap B$'nin aralık uçları elbette A ve B'nin aralık uçlarından oluşur, bunlardan da en fazla $2a + 2b$ tane vardır. Öte yandan A ve B'nin en soldaki ve en sağdaki 4 aralık ucu $A \cap B$'de 2'ye iner. Dolayısıyla $2k \leq 2a + 2b - 2$, yani $k \leq a + b - 1$. Aralıkları doğru seçerek, $k = a + b - 1$ eşitliğini yakalayabileceğimizi göstermek kolay. Özel bir durum olarak, $A_1 \cap A_2$ kümesinin en fazla 199 aralıktan oluştuğunu ve bu sayıyı daha aşağıya alamayacağımızı buluruz.

Demek ki $k_2 = 199$ ve $k_{n+1} = k_n + 99$ dizisinin yüzüncü terimi olan k_{100}'ü bulmalıyız. Kolay bir hesapla $k_{n+1} = k_n + 99 = k_{n-1} + 2 \times 99 = ... = k_2 + (n-1) \times 99 = 199 + (n-1) \times 99$ buluruz, dolayısıyla $k_{100} = k_{99+1} = 199 + 98 \times 99 = 9901$ bulunur.

Y284. *$n \times n$ boyutlu tablodan, her satırdan ve her sütundan birer kez olmak üzere n eleman alındığında bu sayıların toplamı hep aynı sayıya eşitse, bu tabloya "ilginç" tablo diyelim. Her "ilginç" tablonun, birinde her sütundaki elemanlar birbirine eşit, diğerinde de her satırdaki elemanlar birbirine eşit olmak üzere, iki tablonun toplamı şeklinde gösterilebileceğini gösteriniz.*

Çözüm. Aşağıdaki iki savın doğru olduğu kolayca kontrol edilebilir:

Sav 1. İki ilginç tablonun farkı da ilginç tablodur. (Tabloların farkını almak uygun hanelerdeki sayıların farkını almak demektir.)

Sav 2. İlginç bir tabloda bir satır hep aynı sayılardan oluşuyorsa, her satır aynı sayılardan oluşur.

Şimdi M bir ilginç tablo olsun. Bütün satırları M'nin birinci satırına eşit olan N tablosunu alalım. O halde $M - N$ tablosunun birinci satırı 0'lardan oluşacak. Yukarıdaki savlardan dolayı $M - N$ tablosundaki diğer satırların herbirinde de sayılar birbirine eşit olacak. Bu durumda M tablosu

$$M = M + (M - N)$$

şeklinde gösterilebilir.

Y285. *a ve b hiçbiri -1'e eşit olmayan tamsayılar olsun. $x^2 + ax + b + 1 = 0$ denkleminin bir tamsayı çözümü varsa, $a^2 + b^2$ sayısının asal olmadığını gösteriniz.*

Çözüm. Köklerin toplamı $-a$'ya eşit olduğundan köklerin ikisi de tamsayı olmak zorunda. Kökler x_1 ve x_2 ise, Vieta Teoremi'nden $x_1 + x_2 = -a$ ve $x_1x_2 = b + 1$ çıkar. O halde $a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1x_2 - 1)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2 + 1 = x_1^2(x_2^2 + 1) + (x_2^2 + 1) = (x_2^2 + 1)(x_1^2 + 1)$ elde edilir. $b \neq -1$ olduğundan $x_1 \neq 0$ ve $x_2 \neq 0$'dir, dolayısıyla $a^2 + b^2$ sayısı 1'den büyük iki tamsayının çarpımı şeklinde gösterilebildiğinden asal değildir. ♣