Polinom Denklemleri

Özer Çözer

$a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = 0$ biçiminde yazılan denklemlere **polinom denklemler** denir. Burada, **katsayı** adı verilen a'ları kesirli ya da genel sayı olarak alacağız. Marifet, bu denklemi sağlayan x'leri bulmaktır.

Böyle bir denklemin en fazla n tane çözümü olduğu bilinir ve bunun kanıtı da o kadar zor değildir, ama bundan bir başka sayıda sözederiz. Burada, bu denklemleri çözüp çözemeyeceğimizi, çözebilirsek nasıl çözebileceğimizi göreceğiz.

Eğer $a_n \neq 0$ ise, denkleme n–inci **derece**den denklem denir.

I. Birinci Dereceden Denklemler. Birinci dereceden denklemleri bugün artık ilkokul çocukları bile çözüyorlar: $ax + b = 0$ ise $x = -b/a$; $a \neq 0$ olduğundan a'ya bölmekte bir sıkıntı yaşamayız.

II. İkinci Dereceden Denklemler. Bu denklemlerin çözümleri de MÖ 400 yıllarında Babilliler tarafından üç aşağı beş yukarı biliniyordu. $ax^2 + bx + c = 0$ denklemimiz olsun. Anımsatırız: $a \neq 0$. Biraz cebir yapalım:

$$0 = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right)$$
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

eşitliklerinden, $a \neq 0$ olduğundan,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

çıkar. Bundan da sırasıyla,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

ve

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ve

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

çıkar. Denklemi çözdük, biri artılı biri eksili olmak üzere iki çözüm bulduk:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Çözüm biraz fazla kuramsal olmuş olabilir, çünkü $b^2 - 4ac$ negatifse çözüm yoktur, ya da $b^2 - 4ac = 0$ ise iki değil tek bir çözüm vardır[1], ama kimin umurunda! Bu sorunu mühendisler düşünsün. Biz matematikçi olarak görevimizi yaptık! Ayrıca, armaşık sayılara geçersek her sayının kökünü alabiliyoruz.

III. Üçüncü Dereceden Denklemler. Bir, iki derken üçe geldik. Nereye kadar gidebileceğimiz merak konusu.

Yukarda yapılanları okur biliyordu büyük olasılıkla. Bundan sonrasını bulmak insanlık tarihinin en az 2000 yılını aldı. Girolamo Cardano yazımızda da (sayfa 54-58) belirttiğimiz gibi üçüncü dereceden denklemler İtalyan matematikçileri tarafından 1525 dolaylarında, en azından kısmen Scipione dal Ferro tarafından ve tam olarak Niccolo Fontana Tartaglia tarafından çözülmüştür.

2000 yıllık bir uğraşı bugün yarım sayfada toparlayabildiğimiz için çok şanslıyız.

> http://www.vimagic.de/hope/ adresinde ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden denklemleri çözen programlar var. http://mss.math.vanderbilt.edu/cgi-bin/MSSAgent/~pscrooke/MSS/solvepoly.def adresinde daha yüksek dereceden de polinomlar çözülüyor. http://math.truman.edu/~thammond/history/Polynomials.html adresinde polinomların tarihiyle ilgili makale özetleri var.

1 $b^2 - 4ac$'ye $ax^2 + bx + c$ polinomunun diskriminantı denir. Demek ki $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin tek bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul $b^2 - 4ac$ diskriminantının 0 olmasıdır. Bu koşul dördüncü dereceden polinom denklemlerinin çözümü için birazdan gerekecektir.

Denklemimiz $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ olsun. $a \neq 0$, bir kez daha anımsatırız. Denklemi a'ya bölersek, $x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ biçiminde bir denklem buluruz. Burada, $B = b/a$, $C = c/a$, $D = d/a$'dır. Bu son denklemle başlangıçtaki denklemin çözümleri aynıdır. Şimdi $x = y - B/3$ değişikliğini yapalım: $y^3 + \alpha y + \beta = 0$ biçiminde bir denklem buluruz, çünkü kolay bir hesapla görüleceği üzere y^2'ler sadeleşerek kaybolurlar. α ve β'yı B, C, D cinsinden yazabiliriz elbet ama böyle zor bir uğraşa girmeyeceğiz, merak eden okur bulabilir.

Demek ki $y^3 + \alpha y + \beta = 0$ denklemini çözmemiz gerekiyor.

Eğer $\alpha = 0$ ise, çözüm kolay: $y^3 + \beta = 0$ ve $y = -\beta^{-1/3}$. Bundan böyle $\alpha \neq 0$ olsun.

Şimdi şu eşitliğe dikkat edelim:

$$(u - v)^3 + 3uv(u - v) + v^3 - u^3 = 0.$$

Demek ki, u ve v'yi,

$$3uv = \alpha$$
$$v^3 - u^3 = \beta$$

denklemlerinin her ikisini birden sağlayacak biçimde seçersek $u - v$ sayısı $y^3 + \alpha y + \beta = 0$ denkleminin bir çözümü olur.

Birinci denklemden v'yi bulalım: $v = \alpha/3u$. Bulduğumuz bu değeri ikinci denkleme yerleştirelim:

$$\beta = v^3 - u^3 = \alpha^3/27u^3 - u^3,$$

yani,

$$27u^6 + 27\beta u^3 - \alpha^3 = 0,$$

ya da,

$$u^6 + \beta u^3 - \alpha^3/27 = 0,$$

Bu denklemde $w = u^3$ alırsak, w cinsinden ikinci dereceden bir denklem elde ederiz:

$$w^2 + \beta w - \alpha^3/27 = 0.$$

İkinci dereceden denklemleri çözmesini bildiğimizden, yukardaki eşitliği sağlayan w'yi buluruz. Sonra, w'nin üçüncü kökünü alırsak u'yu buluruz. Bundan da, $v = \alpha/3u$ eşitliğini kullanarak v'yi buluruz. Ardından, $y = u - v$ eşitliğini kullanarak y'yi buluruz.

Çözümlerden birini bulunca diğerlerini bulmak da kolaydır: Eğer y_0, $y^3 + \alpha y + \beta = 0$ denkleminin yukarda bulduğumuz çözümüyse, $y^3 + \alpha y + \beta$ polinomu $y - y_0$ polinomuna tam olarak bölünür, yani belli γ, δ sayıları için,

$$y^3 + \alpha y + \beta = (y - y_0)(y^2 + \gamma y + \delta)$$

eşitliği sağlanır. Şimdi, $y^3 + \alpha y + \beta = 0$ denkleminin diğer çözümleri, $y^2 + \gamma y + \delta = 0$ denkleminin çözümleridir. Bu da ikinci dereceden bir denklem olduğundan, çözümü bilinir. Sonuç olarak, denklemin (ille de birbirinden farklı olmak zorunda olmayan) üç çözümü de bulunur.

IV. Dördüncü Dereceden Denklemler. Girolamo Cardano yazımızda da (sayfa 54-58) belirtiğimiz gibi bu tür denklemler Cardano'nun öğrencisi Lodovico Ferrari tarafından 1540'larda çözülmüştür.

$a \neq 0$ olmak üzere, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ denklemiyle başlıyoruz ve yukardaki gibi önce a'ya bölüp $x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ biçiminde bir denklem elde ediyoruz, ardından $x = y - B/4$ alıp, $y^4 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ biçiminde yazılan daha basit bir denkleme varıyoruz. Amacımız bu son denklemi y cinsinden çözmek.

Önce $y^4 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ denklemini aşağıdaki gibi kareye tamamlayalım:

$$y^4 + 2\alpha y^2 + \alpha^2 = \alpha y^2 - \beta y + \alpha^2 - \gamma$$

yani,

$$(y^2 + \alpha)^2 = \alpha y^2 - \beta y + \alpha^2 - \gamma$$

Bu son denklemi y cinsinden çözmeliyiz. Şimdi biraz zeki olup, her z için,

$$\begin{aligned}(y^2 + \alpha + z)^2 &= (y^2 + \alpha)^2 + 2z(y^2 + \alpha) + z^2\\ &= (\alpha y^2 - \beta y + \alpha^2 - \gamma) + 2z(y^2 + \alpha) + z^2\\ &= (\alpha + 2z)y^2 - \beta y + (\alpha^2 - \gamma + 2\alpha z + z^2)\end{aligned}$$

eşitliklerinin, daha doğrusu sadece

$$(y^2 + \alpha + z)^2 = (\alpha + 2z)y^2 - \beta y + (\alpha^2 - \gamma + 2\alpha z + z^2)$$

eşitliğinin ayrımına varmalıyız. Sağ taraf y cinsinden ikinci dereceden olduğundan, z'yi sağ taraf bir kare olacak biçimde seçebiliriz; bunun için z'yi sağ tarafın diskrimantını, yani

$$\beta^2 - 4(\alpha + 2z)\ (\alpha^2 - \gamma + 2\alpha z + z^2)$$

sayısını 0 olacak biçimde seçmeliyiz, ki bu da z cinsinden üçüncü dereceden bir polinom olduğundan her zaman mümkündür. Bundan böyle z'yi öyle seçelim. Demek ki, belli bir $\tau \geq 0$ için,

$$(y^2 + \alpha + z)^2 = \tau^2$$

Şimdi y'yi $y^2 + \alpha + z = \tau$ biçiminde seçersek $y^4 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ denkleminin çözümlerinden birini buluruz. Birini bulduk mu diğerleri daha kolay: Çözüme y_0 dersek, $y^4 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma$ polinomunu $y - y_0$'a bölerek

$$y^4 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = (y - y_0)(y^3 + \delta y^2 + \varepsilon y + \varphi)$$

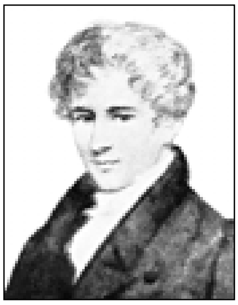
eşitliğini sağlayacak δ, ε, φ sayılarını buluruz. Şimdi $y^4 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ denkleminin öbür çözümleri, üçüncü dereceden olan $y^3 + \delta y^2 + \varepsilon y + \varphi = 0$ denkleminin çözümleridir ki bunları çözmesini Tartaglia sayesinde biliyoruz.

V. Beşinci ve Daha Yüksek Dereceden Denklemler

Beşinci dereceden genel denklemler yukardaki gibi cebirsel olarak, yani dört işlemle ve kök alarak çözülemezler. Çözülmesi bilinmiyor değil, çözülemezler. Hiçkimse, hiçbir zaman çözemez... Bu, matematiksel olarak kanıtlanmıştır.

Bugün hâlâ daha bazıları beşinci dereceden denklemleri çözmeye çalışır, hatta çözdüğünü iddia eder. Buldukları "çözüm" kesinlikle doğru olamaz, bir yerde hata yapmışlardır mutlaka.

Her denklem çözülemez demek istemiyoruz. Örneğin $x^5 + a = 0$ türünden denklemler çözülebilir. Çözülebilecek daha karmaşık denklem aileleri de vardır elbet. Ama cebirsel yöntemlerle çözülemeyecek beşinci dereceden denklemler vardır, hatta bunlar çoğunluktadır. Bu imkânsızlık çok genç yaşlarında ölen Norveçli Niels Henrik Abel (1802-1829) tarafından 1824'te kanıtlanmıştır.

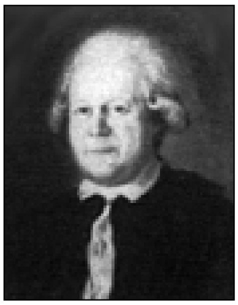

Niels Henrik Abel

Bu, sadece $n = 5$ için değil, eğer $n \geq 5$ ise, n–inci dereceden denklemler için de genel olarak doğrudur. Bu da matematik tarihinin en romantik figürü olan Fransız Evariste Galois (1811-1832) tarafından kanıtlanmıştır.

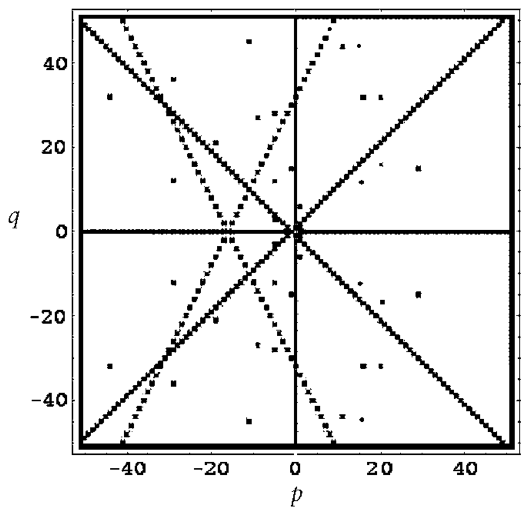

Evariste Galois

Çözülemez diye kollarımızı kavuşturmayacağız herhalde. Ayrıca kim söyledi çözülemeyeceğini? Sadece cebirsel çözümün bulunamayacağını söyledik, analize dayanan yöntemler bulunabilir, neden bulunmasın?

$a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = 0$ denkleminde a_n'nin 0 olmadığını varsayarsak, denklemi a_n'ye bölerek, a_n'nin 1 olduğunu varsayabiliriz. Bu kolay. Ardından, $x = y - a_{n-1}/n$ alırsak n–1 inci terimden de kurtuluruz. Bu da pek zor değil. Ama daha iyisi yapılabilir. 1683'te Tschirnhaus n-inci dereceden bir denklemde x'i değiştirerek, denklemde x^{n-1} ve x^{n-2} terimlerin katsayılarının 0 olduğunu varsayabileceğimizi gösterdi. Beşinci dereceden denklemler için daha daha iyisini yapabileceğimizi 1786'da Erland Samuel Bring kanıtladı: Beşinci dereceden bir denklem $x^5 + px + q = 0$ biçiminde yazılabilir. Aşağı yukarı elli yıl sonra, 1834'te G. B. Jerard bunu genelleştirdi: Tschirnhaus'un yöntemi kullanılarak sadece x^{n-1} ve x^{n-2} terimlerinin değil, x^{n-3} teriminin de olmadığını varsayabiliriz.


E. Samuel Bring

Beşinci dereceden bir denklem alalım: $x^5 + px + q = 0$. Bazı p ve q'ler için bu denklemin çözümleri dört işlem ve kök almayla bulunabilir. Hangi p ve q'ler için böyle cebirsel bir çözümün bulunacağı biliniyor. Pek azı için var. Aşağıdaki grafikte cebirsel çözümlü denklem veren p ve q'yü bulacaksınız.



Genel olarak beşinci dereceden bir denklem, gene Tschirnhaus'un yöntemiyle, $x^5 - x + \alpha = 0$ biçimine getirebilir, ama buradaki α karmaşık bir sayıdır. Bunu da 1786'da Erland Samuel Bring kanıtlamıştır.

Genel olarak beşinci dereceden denklemler çözülebilir, çözülemez değil, ama cebirsel yöntemlerle çözülemez. Örneğin Jacobi teta fonksiyonları kullanılarak beşinci dereceden bir denklemin çözümleri bulunabilir. ♣