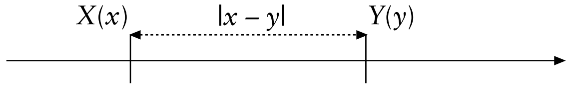
Topoloji Köşesi

Burak Özbağcı*
bozbagci@ku.edu.tr

Metrik Uzaylar

İki nokta arasındaki mesafe, halk arasında, noktalardan birinden diğerine gitmek için katedilen en kısa yolun uzunluğu olarak bilinir. Pek yanlış bir tanım sayılmaz. Bu yazıda "mesafe"nin matematiksel anlamını deşeceğiz. Önce çok bilinen örneklerle başlayalım.

Örnek 1. Bir doğru üstünde koordinatları x ve y olan X ve Y noktaları arasındaki mesafe, herkesin bildiği üzere, $d(X, Y) = |x - y|$ olarak tanımlanır.



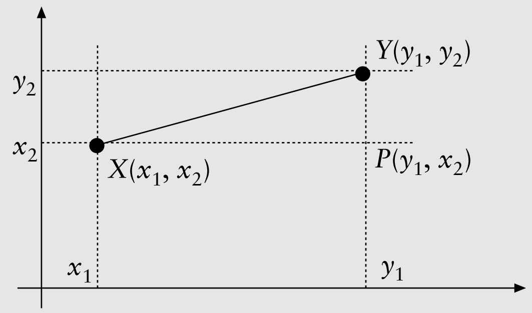
Aynı formülü şöyle yazmak yazımıza birlik sağlayacaktır:

$$d(X, Y) = \sqrt{(x-y)^2}$$

Örnek 2. Bir düzlemde (yani iki boyutlu bir Öklid uzayında) koordinatları (x_1, x_2) ve (y_1, y_2) olan X ve Y noktaları arasındaki mesafe, bu dergiyi eline alan herkesin bildiği gibi,

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

olarak tanımlanır.



Pisagor Teoremi'ni PXY diküçgenine uygulayacak olursak,

$|XY|^2 = |XP|^2 + |PY|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$

çıkar. Dolayısıyla,

$$|XY| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_1 - y_1)^2}.$$

Örnek 3. İçinde bulunduğumuz uzayda bir noktanın konumu, bu derginin bu sayfasını okumaya koyulan herkesin bildiği üzere, sıralanmış üç gerçel sayıyla, (x_1, x_2, x_3) olarak belirlenir. Pisagor teoreminin iki kez uygulanmasıyla, içinde yaşadığımız üç boyutlu uzayın $X(x_1, x_2, x_3)$ ve $Y(y_1, y_2, y_3)$ noktaları arasındaki mesafenin,

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

olduğu kolaylıkla anlaşılır.

Örnek 4. Yukarda yaptıklarımızı genelleştirip boyut sayısını 1, 2, 3'ten n'ye çıkaralım. n boyutlu bir Öklid uzayında, yani $\mathbb{R}^n$ kümesinde, bir nokta sıralanmış n gerçel sayıyla $(x_1, \ldots, x_n)$ olarak belirlenir. Böyle bir uzayda $X(x_1, \ldots, x_n)$ ve $Y(y_1, \ldots, y_n)$ noktaları arasındaki mesafe

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

olarak tanımlanır.

Bu Örneklerin Ortak Yanı. n boyutlu uzay $\mathbb{R}^n$ olarak gösterilir, ama biz M simgesini kullanalım. Yukarda tanımlanan mesafelerden herbiri $M \times M$ kümesinden pozitif gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}^{\geq 0}$'ye giden ve her $X, Y, Z \in M$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur:

M1. $d(X, Y) = 0$ ancak ve ancak $X = Y$ ise,

M2. Simetri. $d(X, Y) = d(Y, X)$,

M3. Üçgen Eşitsizliği.

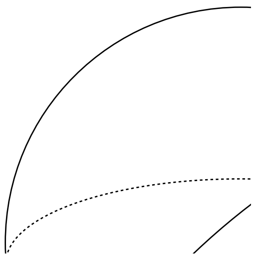
$$d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$$

M1 ve M2'nin her n için yukarda tanımlanan d mesafeleri için doğru olduğu çok bariz. M3'ün doğ-

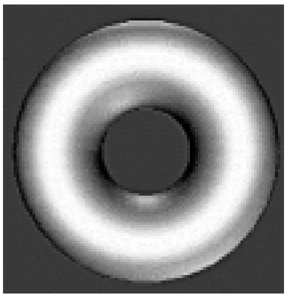
* Koç Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.

ruluğunu kanıtlamak biraz daha zor olabilir. Okur kanıtlamaya çalışsın. (Ödüllerimizi unutmayın!)

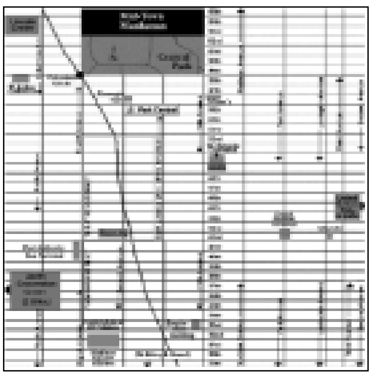
Küre. Bir X noktasından bir başka Y noktasına gitmek yukardaki örneklerde olduğu gibi her zaman bir doğru parçası boyunca gerçekleşemeyebilir. Örneğin dünya üzerindeysek küreye benzer bir nesne



üzerinde dolaşırız ve bir noktadan bir başka noktaya gitmek için bu küremsi üzerinde bir yay çizeriz. O yayların en kısasının uzunluğuna, ki o kısa yaylardan birkaç tane olabilir, $d(X, Y)$ diyelim. Eğer küreyi M simgesiyle simgelersek, bu fonksiyon da $M \times M$ kümesinden $\mathsf{R}^{\geq 0}$ kümesine gider ve yukardaki M1, M2, M3 özelliklerini sağlar.



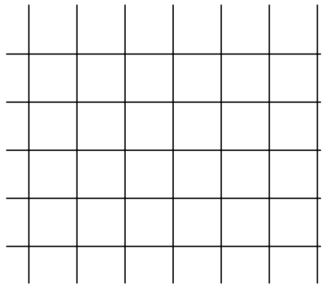
Simit. Dünya illa bir küre olmayabilir, dünya yandaki şekildeki gibi bir simite de benzeyebilir, bu dünya benzemiyorsa başka bir dünya benzeyebilir. Eğer, karınca misali, bir simidin üstünde yaşıyorsak, o zaman simidin üstündeki X ve Y noktaları arasındaki en kısa yolu bulmak için tuhaf bir eğrinin üstünde yürümek zorunda kalabiliriz. Tuhaf ya da değil, böyle bir eğri vardır ve bu en kısa eğrinin uzunluğu X ve Y arasındaki (simit üzerindeki) mesafe olarak tanımlanır. Bu en kısa mesafeye $d(X, Y)$ dersek ve simide S adını verirsek, burada tanımlanan d, $S \times S$'den $\mathsf{R}^{\geq 0}$ kümesine giden ve yukardaki M1, M2, M3 özelliklerini sağlayan bir fonksiyondur. Bunun kanıtı son derece basit, okura bırakıyoruz.



New York, Central Park civarı

New York. Bir an için New York'ta yaşadığımızı varsayalım. New York haritalarını görmüşsünüzdür. New York bilinçli ve planlı bir biçimde inşa edildiğinden sokakları kuzey-güney ve doğu-batı yönünde ve nerdeyse dümdüzdür. Bir noktadan başka bir noktaya gitmek için New York'ta tarlada yüründüğü gibi yürünmez, karşımıza binalar çıkar (sanki İstanbul'da çıkmaz!) Dolayısıyla New York'ta iki nokta arasındaki en kısa yol hemen hemen hiçbir zaman doğru parçası değildir. Tarlada bile en kısa yol bir doğru parçası olmayabilir, tarlanın ortasında bir kuyu olabilir.

New York'un sokaklarının dümdüz ve birim aralıklarla olduğunu varsayalım. Yani New York sokakları sağdaki şekildeki gibi ızgara biçiminde olsun. O zaman koordinatları (x_1, x_2) olan bir X noktasından koordinatları (y_1, y_2) olan bir Y noktasına gitmek için en kısa yollardan biri önce yatay sonra dikey giden yoldur, dolayısıyla bu iki nokta arasındaki en kısa mesafe,



Varsayımsal (ideal!) New York haritası

$$d_{NY}(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

dir. Eğer New York'un yol haritasının noktalarına M dersek, bu d_{NY} fonksiyonu da yukardaki M1, M2, M3 özelliklerini sağlayan $M \times M$'den $\mathsf{R}^{\geq 0}$ kümesine giden bir fonksiyondur.

Bu formülü New York haritasından kurtarıp tüm düzlemde tanımlayabiliriz. Düzlemde koordinatları (x_1, x_2) olan bir X noktasıyla koordinatları (y_1, y_2) olan bir Y noktası arasındaki mesafeyi,

$$d_{NY}(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

olarak tanımlayalım. Bu, sadece doğu-batı ve kuzey-güney yönünde yolculuk yapılabilen düzlemde iki nokta arasındaki en kısa yolun uzunluğudur. Eğer R^2 kümesine M dersek, d_{NY}, yukardaki M1, M2, M3 özelliklerini sağlayan ve $M \times M$'den $\mathsf{R}^{>0}$ kümesine giden bir fonksiyondur.

Mesafe. Artık baklayı ağzımızdan çıkarma zamanı geldi. M herhangi bir küme olsun. $M \times M$ kümesinden $\mathsf{R}^{\geq 0}$ kümesine giden ve yukardaki M1, M2, M3 özelliklerini sağlayan bir fonksiyona **mesafe** (ya da **uzaklık**) denir. Böyle bir (M, d) çiftine de **metrik uzayı** denir. Demek ki yukardaki örneklerin herbiri birer metrik uzayıdır.

Bilindik Çemberler. Bir (M, d) metrik uzayında, $O \in M$ ve $r \in \mathsf{R}$ olsun.

$$\{P \in M : d(O, P) = r\}$$

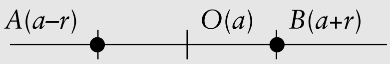
kümesine O merkezli r yarıçaplı **çember** denir. Bu çemberi $Ç(O, r)$ olarak gösterelim.

Eğer $r < 0$ ise bu çember boşkümedir. (Bundan da, boşkümenin, merkezi herhangi bir nokta olan bir çember olduğu gibi pek işe yaramayan bir bilgi çıkar!)

Eğer $r = 0$ ise bu çember sadece tek öğeli bir kümedir, $\{O\}$ kümesidir. Ama eğer $r > 0$ ise çember metrik uzayına göre değişir.

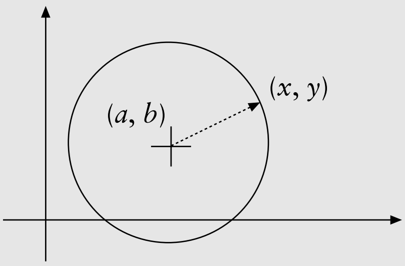
Eğer M ilk dört örnekteki Öklid uzaylarıysa bildiğimiz çemberleri elde ederiz: Aşağıdaki şekillerde görüldüğü gibi, bir boyutta çemberlerin en fazla iki noktası vardır, iki boyutta bildiğimiz çemberleri, üç boyutta kürelerin yüzeylerini elde ederiz.

Bir boyutlu R Öklid uzayında



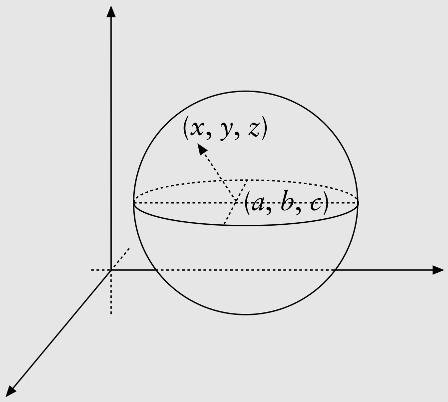
$$Ç(a, r) = \{x : |x - a| = r\} = \{a - r, a + r\}$$

İki boyutlu R² Öklid uzayında



$$Ç((a,b), r) = \{(x,y) : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r\}$$

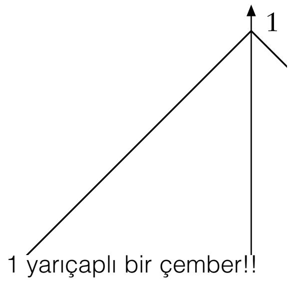
Üç boyutlu R³ Öklid uzayında



$$Ç((a,b,c), r) = \{(x,y,z) : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r\}$$

Bilinmedik Çemberler. Şimdi gene $M = \mathbb{R}^2$ olsun ama bu sefer mesafe tanımımızı değiştirelim. Önce $\mathbb{R}^2$ üzerinde New York mesafesini alalım, yani mesafemiz,

$$d_{NY}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$



1 yarıçaplı bir çember!!

olsun. O zaman (0, 0) merkezli 1 yarıçaplı çemberimiz $\{(x, y) : |x| + |y| = 1\}$ olur. Bu çemberi çizecek olursak, sağdaki gibi bir şekil elde ederiz.

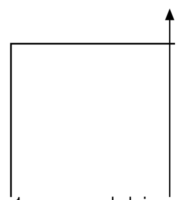
Bir başka örnek: Gene $M = \mathbb{R}^2$ olsun. Şimdi yepyeni bir mesafe tanımlayalım. Eğer $X = (x_1, x_2)$ ve $Y = (y_1, y_2)$ ise,

$$d_\infty(X, Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

olsun. Bu d_∞ fonksiyonunun yukarda verilen M1, M2, M3 özelliklerini sağladığını anlamak kolay. Şimdi bu metrik uzayında (0, 0) merkezli 1 yarıçaplı **birim çemberi** bulalım:

$$Ç((0, 0), 1) = \{(x, y) : \max\{|x|, |y|\} = 1\}$$

Bu çemberi çizecek olursak, (0, 0) merkezli kenar uzunluğu 2 olan bir kare buluruz!

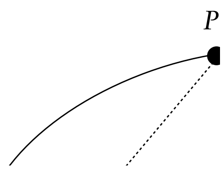


1 yarıçaplı bir başka çember!!

Elips. Öklid uzayında elips, verilen iki noktaya uzaklıklarının toplamının sabit olduğu noktalar kümesidir. Verilen iki noktaya A ve B dersek, sabit sayıya da r dersek, demek ki bir elips,

$$\{P : d(A, P) + d(B, P) = r\}$$

kümesidir. Öklid uzayında bildiğimiz mesafe kavramı kullanıldığından (ikinci örneğimiz), bildiğimiz elipsi elde ederiz.



Öklid uzayında bir elips, $\{P : d(P, A) + d(P, B) = r\}$

Soru. $M = \mathbb{R}^2$ olsun.

$$d_{NY}(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

ve

$$d_\infty(X, Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

olarak verilen metrik uzaylarının elipslerinin neye benzediğini bulun. ♣