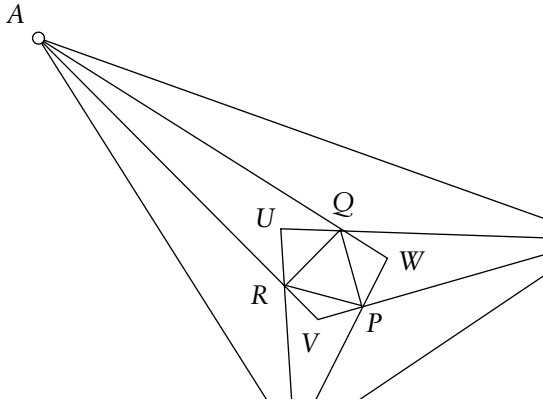


Morley Teoremi'nin Trigonometrik Kanıtı

Alpaslan Parlakçı* / aparlakci@bilgi.edu.tr

Teoremi bir defa daha yazmaya gerek yok, doğrudan kanıtla geçiyoruz. A, B ve C köşelerinin açılarını sırasıyla $3\alpha, 3\beta$ ve 3γ diyelim. Demek ki $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$. BC, CA ve AB kenarlarının uzunluklarına da gene bu sırayla a, b ve c diyelim.



Trigonometrik Kanıt: Bu kanıt büyük olasılıkla ilk kez [A. Letac, Solution (Morley's triangle), Problem No. 490, Sphinx, 9 (1939) 46]'da yayımlanmıştır. Rusça [D. O. Shklyarskynin, N. N. Chentsov, Y. M. Yaglom, Selected Problems ve Theorems of Elementary Mathematics, v.2, problem 97, Moscow, 1952]'de de bulunabilir.

Planımız şöyle: ARB, BPC ve CQA üçgenlerinde tabanları ve tabanlara değen açıları bildiğimizden, Sinüs Teoremi'nden AR, BR, BP, CP, CQ , and AQ kenarlarını ($a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ cinsinden) bulabiliriz. Sonra, AQR, BPR ve CPQ üçgenlerine Kosinüs Teoremi'ni uygulayarak QR, PR ve PQ kenarlarını hesaplayabiliriz. Ne sihirdir ne keramet, bu üç kenar birbirine eşit çıkar.

Planımızı uygulayalım.

Sinüs Teoremi'nden, $c/\sin(3\gamma) = b/\sin(3\beta) = a/\sin(3\alpha)$ çıkar. Şimdi bütün şekli belli bir ölçekte küçültüp (ya da büyültüp) bu sabitin 2 olduğunu varsayabiliriz, çünkü bu değişim PRQ üçgeninin eşkenarlığını bozmadır. Demek ki $c = 2\sin(3\gamma), b =$

$2\sin(3\beta), a = 2\sin(3\alpha)$.

Şimdi BPC üçgenine bakalım. Gene Sinüs Teoremi'nden, $BP/\sin(\gamma) = a/\sin(180^\circ - \beta - \gamma) = 2\sin(3\alpha)/\sin(\beta + \gamma) = 2\sin(3\alpha)/\sin(60^\circ - \alpha)$ çıkar. Demek ki, $BP = 2\sin(3\alpha)\sin(\gamma)/\sin(60^\circ - \alpha)$. Şimdi biraz cambazlık yapıp $\sin(3\alpha)$ 'yı hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha) \\ &= 4\sin(\alpha)[(\sqrt{3}/2)^2 - \sin^2(\alpha)] \\ &= 4\sin(\alpha)[\sin^2(60^\circ) - \sin^2(\alpha)] \\ &= 4\sin(\alpha) \times (\sin(60^\circ) + \sin(\alpha)) \times (\sin(60^\circ) - \sin(\alpha)) \\ &= 4\sin(\alpha) \times 2\sin[(60^\circ + \alpha)/2]\cos[(60^\circ - \alpha)/2] \times \\ &\quad 2\sin[(60^\circ - \alpha)/2]\cos[(60^\circ + \alpha)/2] \\ &= 4\sin(\alpha)\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha). \end{aligned}$$

Bu eşitliği yukarıda bulduğumuz $BP = 2\sin(3\alpha)\sin(\gamma)/\sin(60^\circ - \alpha)$ formülüne yerleştirirsek,

$$BP = 8\sin(\alpha)\sin(\gamma)\sin(60^\circ + \alpha)$$

buluruz. Aynı biçimde hesaplayarak,

$$BR = 8\sin(\gamma)\sin(\alpha)\sin(60^\circ + \gamma)$$

eşitliğini de buluruz.

Planımızın ikinci aşamasına geçelim. Kosinüs Teoremi'nden,

$$PR^2 = BP^2 + BR^2 - 2 \times BP \times BR \times \cos(\beta)$$

çıklar. Bundan ve yukarıda bulduğumuz BP ve BR eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} PR^2 &= 64\sin^2(\alpha)\sin^2(\gamma)[\sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ + \gamma) \\ &\quad - 2\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ + \gamma)\cos(\beta)] \end{aligned}$$

çıklar. Öte yandan, $(60^\circ + \alpha) + (60^\circ + \gamma) + \beta = 180^\circ$.

Demek ki açıları $60^\circ + \alpha, 60^\circ + \gamma$ ve β olan bir üçgen var. Hatta sonsuz tane var. Bu üçgenlerden yarıçapı $1/2$ olan bir çemberin üstüne yerleşeni alalım. Üçgenin kenarları Sinüs Teoremi'ne göre $60^\circ + \alpha, 60^\circ + \gamma$ ve β 'ya eşittir. Üçgene Kosinüs Teoremi'ni uygularsak,

$$\begin{aligned} \sin^2(\beta) &= \sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ + \gamma) - \\ &\quad 2\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ + \gamma)\cos(\beta) \end{aligned}$$

buluruz. Bu da bize

$$PR = 8\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)$$

verir. Bu terim α, β, γ 'ya göre simetrik olduğundan, aynı eşitliği PQ ve QR için de buluruz. Demek ki, $PR = PQ = QR$. ♣

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Bilgisayar Bilimleri Bölümü öğretim üyesi.