Kapak Konusu: $2 \times 2 = 4$

Özellik Nedir?

Sayfa 42'de Tanımlanabilir Altküme Beliti'nden sözederken ne olduğunu söylemeden "özellik"lerden sözettik. Burada özellikten ne anladığımızı açıklayacağız.

Önce matematiksel tümcenin tanımını verelim. Her dilde olduğu gibi matematikçede de bir tümce yazmak için önce bir alfabeye ihtiyaç vardır. Matematikçenin alfabesi şu simgelerden oluşur:

$$\exists, \wedge, \neg, (,), =, \in, v_0, v_1, v_2, \ldots$$

$v_0, v_1, v_2, \ldots$ simgelerine (harflerine) **değişken** adı verilir.

> Her ne kadar $v_0, v_1, v_2, \ldots$ değişken simgeleri yüzünden alfabemiz sonsuz gibi görünse de, bu aldatıcıdır. Değişkenleri sadece v ve $|$ simgeleriyle elde edebiliriz:
>
> v_0 yerine v yazalım,
> v_1 yerine $v|$ yazalım,
> v_2 yerine $v||$ yazalım, ...
>
> Böylece, sadece $\exists, \wedge, \neg, (,), =, \in, v, |$ simgeleriyle tüm matematiksel tümceleri yazabiliriz.

Matematiksel tümcenin tanımı basitten karmaşığa doğru verilir. Önce, adına "atomik" denen en basit matematiksel tümceleri tanımlayacağız (ilk iki tanım), sonra atomik tümcelerin yardımıyla elde edilen daha karmaşık tümceleri:

1) Her i ve j için, $v_i = v_j$ matematiksel bir tümcedir.

2) Her i ve j için, $v_i \in v_j$ matematiksel bir tümcedir.

3) Eğer φ matematiksel bir tümceyse, $\neg(\varphi)$ de matematiksel bir tümcedir

4) Eğer φ ve ψ matematiksel tümcelerse, $(\varphi) \wedge (\psi)$ de matematiksel bir tümcedir.

5) Eğer φ matematiksel bir tümceyse, her i doğal sayısı için, $\exists v_i\ (\varphi)$ de matematiksel bir tümcedir.

Yukarda tanımlanan tümceler şimdilik birtakım harflerden oluşan anlamsız birer dizidir. Bu anlamsız tümcelere şu anlamları yükleriz:

1) $v_i = v_j$, elbette "v_i, v_j'ye eşittir" olarak yorumlanır.

2) $v_i \in v_j$ tümcesi "v_i, v_j'nin bir öğesidir" olarak yorumlanır.

3) $\neg(\varphi)$ tümcesi "φ doğru değil" olarak yorumlanır.

4) $(\varphi) \wedge (\psi)$ tümcesi "hem φ hem ψ doğru" olarak yorumlanır.

5) $\exists v_i\ (\varphi)$ tümcesi "φ'yi doğrulayan bir v_i var" olarak yorumlanır.

Yukardaki simgelerle yazılan tümceler çok karmaşık olabileceklerinden bazı kısaltmalar yapılır. Birkaç örnek verelim:

1) Gereksiz olduğu düşünülen parantezler yazılmaz. Bundan böyle biz de yazmayacağız.

2) v'ler yerine genelde x, y, z gibi simgeler yeğlenir.

3) $\varphi \vee \psi$, $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ tümcesinin kısaltılmışıdır ve elbette "φ ya da ψ'den en az biri doğru" (ikisi birden de doğru olabilir) olarak yorumlanmalıdır.

4) $\varphi \to \psi$, $\neg\varphi \vee \psi$ tümcesinin kısaltılmışıdır ve elbette "eğer φ doğruysa ψ de doğrudur" olarak yorumlanmalıdır.

5) $\varphi \leftrightarrow \psi$, $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ tümcesinin kısaltılmışıdır ve elbette "eğer φ'nin doğru olması için gerek ve yeter koşul ψ'nin doğru olmasıdır" olarak yorumlanmalıdır.

6) $\forall x\ \varphi$, $\neg(\exists x\ \neg\varphi)$ tümcesinin kısaltılmışıdır ve elbette "her x için φ doğrudur" olarak yorumlanmalıdır.

7) $\neg(x = y)$ yerine $x \neq y$ yazılır.

8) $\neg(x \in y)$ yerine $x \notin y$ yazılır.

Şimdi özelliğin ne olduğunu söyleyebiliriz. Bizim anladığımız anlamda özellik, $\exists$ (ya da $\forall$) simgesinin kapsamına girmemiş bir değişken barındıran matematiksel bir tümcedir.

Örneğin, "en az bir öğesi var" yani "boşküme değil" özelliği şöyle ifade edilir: $\exists y\ y \in x$. (Bu özellik $x \neq \emptyset$ olarak kısaltılır.)

"Sadece bir öğesi var" özelliği şöyle ifade edilir: $\exists y\ (y \in x \wedge \forall z\ (z \in x \to z = y))$. (Bu özellik $\exists y\ x = \{y\}$ olarak da kısaltılır.)

"Boşküme öğesidir" özelliği şöyle ifade edilir: $\exists y\ (y \in x \wedge \forall z\ z \notin y)$. (Bu da $\emptyset \in x$ olarak kısaltılır.)

Yukardaki üç özellik de x değişkeninin özelliğidir. Bu özelliklerin x'le ilgili olduğunu iyice belirtmek için φ yerine $\varphi(x)$ yazmak kolaylık sağlar.

Matematiksel olarak ifade edilen her önerme yukardaki alfabeyle yukardaki kurallara uyularak yazılabilir. Örneğin "x bir çift sayıdır" böyle bir özelliktir (okura alıştırma). ♣