



Tümevarımla Kanıt ve İyi Sıralama

Tümevarımla kanıtın neden geçerli bir yöntem olduğunu kanıtlayabiliriz artık. Toplama, çarpma ve sıralamaya ilgili basit olguları bildiğimizi varsayıyoruz.

Teorem 1. $\varphi(n)$, doğal sayılar hakkında bir önerme olsun. Varsayalım ki

a) $\varphi(0)$ doğru,

b) Her $\varphi(n)$ doğru olduğunda $\varphi(n+1)$ de doğru.

O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi(n)$ doğrudur.

Kanıt: $S(n) = n + 1$ olduğundan bu teorem aynen sayfa 45'teki Teorem 4'tür. \square

Bir Çeşitleme. Tümevarımla kanıtın bir çeşitlemesi de şöyledir. Kanıtlamak istediğimiz önerme önce 1 için kanıtlanır. Arkasından önermenin, daha önce olduğu gibi sadece $n - 1$ için değil, n 'den küçük tüm sayılar için doğru olduğu varsayılıp, önerme n için kanıtlanır.

Teorem 2. $\varphi(n)$ doğal sayılar hakkında bir önerme olsun. Eğer her n doğal sayısı için, $\varphi(0)$, ..., $\varphi(n-1)$ önermeleri doğru olduğunda $\varphi(n)$ de doğruysa, o zaman $\varphi(n)$ her n için doğrudur. Bir başka deyişle, eğer her n doğal sayısı için, n 'den küçük her m doğal sayısı φ 'yi doğruladığında $\varphi(n)$ de doğrulanıyorsa, o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n)$ doğrudur. Gene bir başka deyişle, eğer her n için,

$$(\forall m (m < n \rightarrow \varphi(m))) \rightarrow \varphi(n)$$

önermesi doğruysa, o zaman her n için $\varphi(n)$ doğrudur.

Kanıt: $\psi(n)$, $(\forall m (m < n \rightarrow \varphi(m))) \rightarrow \varphi(n)$ önermesi olsun. Teoremin koşullarını varsayalım; yani her n için $\psi(n)$ önermesi doğru olsun. Her n doğal sayısı için $\varphi(n)$ 'nin doğru olduğunu kanıtlayacağız. Ama önce bir başka önermeyi kanıtlayacağız. $\alpha(n)$ önermesi, "her $m < n$ için $\varphi(m)$ doğrudur" önermesi olsun. Yani $\alpha(n)$ önermesi

$$\forall m (m < n \rightarrow \varphi(m))$$

önermesi olsun. Önce $\alpha(n)$ önermesinin doğruluğunu n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Doğru

olduğunu bildiğimiz $\psi(n)$ önermesinin $\alpha(n) \rightarrow \varphi(n)$ önermesi olduğuna dikkatinizi çekerim.

Birinci Adım. Bu adımda $\alpha(0)$ önermesinin, yani $\forall m (m < 0 \rightarrow \varphi(m))$ önermesinin doğru olduğunu kanıtlayacağız. Tümevarımla kanıtta genellikle birinci adım çok kolaydır. Burada da birinci adım kolay ama biraz fazla kolay olduğundan anlaşılması zor olabilir.

0'dan küçük doğal sayı olmadığından, 0'dan küçük her doğal sayı her özelliği sağlar. (0'dan küçük doğalsayılar kümesi boşkümedir ve boşkümenin her ögesi her özelliği sağlar.) Dolayısıyla 0'dan küçük her m sayısı için $\varphi(m)$ doğrudur. Demek ki $\alpha(0)$ doğrudur.

Şöyle de açıklayabiliriz: 0'dan küçük bir m doğal sayısı için $\varphi(m)$ yanlış olsaydı, o zaman 0'dan küçük bir m doğal sayısı olurdu, ki yok öyle bir doğal sayı.

Tümevarım Adımı. Şimdi $\alpha(n)$ 'nin doğru olduğunu varsayıp $\alpha(n+1)$ 'in doğru olduğunu kanıtlayacağız. m , $n+1$ 'den küçük bir sayı olsun. $\varphi(m)$ 'nin doğru olduğunu kanıtlamalıyız. m , $n+1$ 'den küçük olduğundan, ya $m < n$ ya da $m = n$. Eğer $m = n$ ise, tümevarım varsayımına göre $\alpha(n)$ doğru olduğundan, ayrıca teoremin hipotezi ne göre $\psi(n)$, yani $\alpha(n) \rightarrow \varphi(n)$ doğru olduğundan, $\varphi(n)$ de doğrudur. Eğer $m < n$ ise, o zaman tümevarım varsayımına göre $\alpha(n)$ doğru olduğundan, yani $\forall m (m < n \rightarrow \varphi(m))$ doğru olduğundan $\varphi(m)$ de doğrudur. Demek ki $m < n + 1$ ise $\varphi(m)$ doğru, yani $\alpha(n+1)$ doğru.

Böylece her n için, $\alpha(n)$ 'nin doğru olduğunu kanıtlamış olduk.

Öte yandan, teoremin hipotezine göre, her n için, $\psi(n)$ önermesi, yani $\alpha(n) \rightarrow \varphi(n)$ önermesi de doğru.

Demek ki her n için $\varphi(n)$ önermesi de doğrudur. \square

Bölme Teoremi. n ve m iki doğal sayı olsun, ama $m \neq 0$ olsun. O zaman öyle q ve r doğal sayıları vardır ki, $n = mq + r$ ve $r \leq m$ 'dir.

Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n < m$ ise $q = 0$ ve $r = n$ alabiliriz.

Şimdi $n \geq m$ olsun ve teoremin n 'den küçük sayılar için doğru olduğunu varsayalım. p doğal sayısı $m + p = n$ eşitliğini sağlasın. $p < n$ olduğundan, teorem p için doğru. Demek ki belli bir q ve $r \leq m$ doğal sayıları için $p = mq + r$ eşitliği doğru. Şimdi $n = m + p = m + mq + r = m(q + 1) + r$. Teoremi böylece n için de kanıtlamış olduk. \square

Yukarda bulunan q ve r 'den birer adet olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz.

Teorem 2'nin Yanlış Bir Kanıtı. Yanlış kanıtlar her zaman yararlıdır. İşte biri. Diyelim teorem yanlış, yani diyelim φ 'yi sağlamayan doğal sayılar var. n doğal sayısı φ 'yi sağlamayan en küçük doğal sayı olsun. Demek ki her $m < n$ için $\varphi(m)$ doğru, yani $\forall m (m < n \rightarrow \varphi(m))$ doğru. Teoremin varsayımına göre $\psi(n)$ önermesi doğru, yani

$$\forall m (m < n \rightarrow \varphi(m)) \rightarrow \varphi(n)$$

önermesi doğru. Demek ki $\varphi(n)$ önermesi de doğru. \square

Yukardaki kanıt yanlıştır. Çünkü yukardaki kanıt, φ 'yi sağlamayan doğal sayılar varsa, o zaman φ 'yi sağlamayan en küçük doğal sayının da var olacağını varsayıyor. Oysa biz daha böyle bir

şey kanıtlamadık. Kanıtlayacağız şimdi. Göreceğiniz üzere kanıtımız Teorem 2'yi kullanacak.

Teorem 3. Doğal sayılar kümesinin boş olmayan her altkümünün bir en küçük ögesi vardır.

Kanıt: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ olsun. A 'nın bir en küçük ögesi olduğunu kanıtlayacağız. Böyle bir ögenin (sayının) olmadığını varsayalım. Teorem 2'yi kullanarak $A = \emptyset$ eşitliğini, yani hiçbir n doğal sayısının A 'da olmadığını kanıtlayacağız.

Birinci Adım. 0, A 'de değil, çünkü olsaydı o zaman 0 elbette A 'nın en küçük ögesi olacaktı, ki biz öyle bir öge olmadığını varsayıyoruz.

Tümevarım Adımı. Şimdi n 'den küçük hiçbir sayının A 'da olmadığını varsayalım. O zaman n de A 'da olamaz, çünkü olsaydı o zaman n elbette A 'nın en küçük ögesi olurdu.

Yukardaki teoreme göre hiçbir doğal sayı A 'da olamaz ve A boşkümedir. \square

Yukardaki özelliği sağlayan bir tamsıralamaya iyi sıralama denir. Demek ki $(\mathbb{N}, <)$ bir iyi sıralamadır.

Sonuç. Eğer bir $\alpha(n)$ önermesi bir doğal sayı için yanlıştır, o zaman α 'nın yanlış olduğu en küçük bir doğal sayı vardır. \clubsuit

Kullandığımız Belitler

Daha önceki yazılarda kümeler kuramının birkaç belitini verdik. O belitleri (metinde yer aldığı sırayla değil, bir başka sırayla) yazalım:

1. **Boşküme Beliti.** Hiç ögesi olmayan bir küme vardır.

2. **Eşitlik Beliti.** Aynı öğeleri olan iki küme birbirine eşittir.

3. **Tanımlanabilir Altküme Beliti.** Eğer φ bir özellikse ve x bir kümeysse, x 'in sadece ve sadece φ özelliğini sağlayan öğelerini öge olarak içeren ve bunlardan başka bir öge içermeyen bir küme vardır.

4. **Bileşim Beliti.** Eğer x bir kümeysse, sadece ve sadece x 'in öğelerinin öğelerinden oluşan bir küme vardır.

5. **İki Ögeli Küme Beliti.** Eğer x ve y birer kümeysse, öge olarak sadece x ve y 'yi içeren bir küme vardır.

6. **Altkümeler Kümesi Beliti.** Eğer x bir kümeysse, öge olarak sadece ve sadece x 'in altkümelerini içeren bir küme vardır.

7. **Tümevarımsal Küme Beliti.** Tümevarımsal bir küme vardır.

8. **Temellendirme Beliti.** Eğer x boş olmayan bir kümeysse, o zaman x 'te $x \cap y = \emptyset$ eşitliğini sağlayan bir y ögesi vardır.

Üçüncü belit, bir tek belit değildir. O belit her φ özelliği için bize ayrı bir belit verir. Yani üçüncü belit, belitten ziyade bir "belit şeması"dır.

Sekizinci beliti hiç kullanmayacağımızdan o belite aslında gereksinimiz yok. İlk dört belitle \emptyset 'den başka bir küme olduğu kanıtlanamaz. Yedinci belit olmadan sonsuz ögeli bir kümenin olduğu kanıtlanamaz.

Kümeler kuramının başka belitleri de vardır. O belitleri ve ne işe yaradıklarını bir başka sayımızda işleriz. \clubsuit