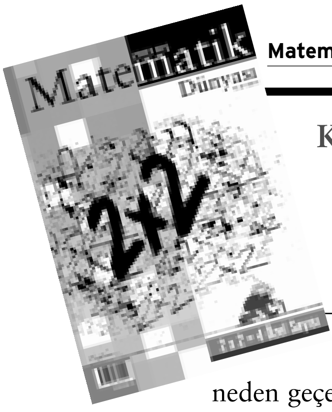

Kapak Konusu: $2 \times 2 = 4$

Tümevarımla Kanıt ve İyi Sıralama

Tümevarımla kanıtın neden geçerli bir yöntem olduğunu kanıtlayabiliriz artık. Toplama, çarpma ve sıralamayla ilgili basit olguları bildiğimizi varsayıyoruz.

Teorem 1. $\varphi(n)$, *doğal sayılar hakkında bir önerme olsun. Varsayalım ki*
a) $\varphi(0)$ *doğru*,
b) *Her* $\varphi(n)$ *doğru olduğunda* $\varphi(n+1)$ *de doğru.*
O zaman her $n \in \mathbb{N}$ *için* $\varphi(n)$ *doğrudur.*

Kanıt: $S(n) = n + 1$ olduğundan bu teorem aynen sayfa 45'teki Teorem 4'tür. □

Bir Çeşitleme. Tümevarımla kanıtın bir çeşitlemesi de şöyledir. Kanıtlamak istediğimiz önerme önce 1 için kanıtlanır. Arkasından önermenin, daha önce olduğu gibi sadece $n - 1$ için değil, n'den küçük tüm sayılar için doğru olduğu varsayılıp, önerme n için kanıtlanır.

Teorem 2. $\varphi(n)$ *doğal sayılar hakkında bir önerme olsun. Eğer her n doğal sayısı için*, $\varphi(0), ..., \varphi(n-1)$ *önermeleri doğru olduğunda* $\varphi(n)$ *de doğruysa, o zaman* $\varphi(n)$ *her n için doğrudur. Bir başka deyişle, eğer her n doğal sayısı için, n'den küçük her m doğal sayısı* φ*'yi doğruladığında* $\varphi(n)$ *de doğrulanıyorsa, o zaman her n doğal sayısı için* $\varphi(n)$ *doğrudur. Gene bir başka deyişle, eğer her n için,*

$$(\forall m\ (m < n \to \varphi(m))) \to \varphi(n)$$

önermesi doğruysa, o zaman her n için $\varphi(n)$ *doğrudur.*

Kanıt: $\psi(n)$, $(\forall m\ (m < n \to \varphi(m))) \to \varphi(n)$ önermesi olsun. Teoremin koşullarını varsayalım; yani her n için $\psi(n)$ önermesi doğru olsun. Her n doğal sayısı için $\varphi(n)$'nin doğru olduğunu kanıtlayacağız. Ama önce bir başka önermeyi kanıtlayacağız. $\alpha(n)$ önermesi, "her $m < n$ için $\varphi(m)$ doğrudur" önermesi olsun. Yani $\alpha(n)$ önermesi

$$\forall m\ (m < n \to \varphi(m))$$

önermesi olsun. Önce $\alpha(n)$ önermesinin doğruluğunu n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Doğru olduğunu bildiğimiz $\psi(n)$ önermesinin $\alpha(n) \to \varphi(n)$ önermesi olduğuna dikkatinizi çekerim.

Birinci Adım. Bu adımda $\alpha(0)$ önermesinin, yani $\forall m\ (m < 0 \to \varphi(m))$ önermesinin doğru olduğunu kanıtlayacağız. Tümevarımla kanıtta genellikle birinci adım çok kolaydır. Burada da birinci adım kolay ama biraz fazla kolay olduğundan anlaşılması zor olabilir.

0'dan küçük doğal sayı olmadığından, 0'dan küçük her doğal sayı her özelliği sağlar. (0'dan küçük doğalsayılar kümesi boşkümedir ve boşkümenin her öğesi her özelliği sağlar.) Dolayısıyla 0'dan küçük her m sayısı için $\varphi(m)$ doğrudur. Demek ki $\alpha(0)$ doğrudur.

Şöyle de açıklayabiliriz: 0'dan küçük bir m doğal sayısı için $\varphi(m)$ yanlış olsaydı, o zaman 0'dan küçük bir m doğal sayısı olurdu, ki yok öyle bir doğal sayı.

Tümevarım Adımı. Şimdi $\alpha(n)$'nin doğru olduğunu varsayıp $\alpha(n+1)$'in doğru olduğunu kanıtlayacağız. m, $n+1$'den küçük bir sayı olsun. $\varphi(m)$'nin doğru olduğunu kanıtlamalıyız. m, $n+1$'den küçük olduğundan, ya $m < n$ ya da $m = n$. Eğer $m = n$ ise, tümevarım varsayımına göre $\alpha(n)$ doğru olduğundan, ayrıca teoremin hipotezine göre $\psi(n)$, yani $\alpha(n) \to \varphi(n)$ doğru olduğundan, $\varphi(n)$ de doğrudur. Eğer $m < n$ ise, o zaman tümevarım varsayımına göre $\alpha(n)$ doğru olduğundan, yani $\forall m\ (m < n \to \varphi(m))$ doğru olduğundan $\varphi(m)$ de doğrudur. Demek ki $m < n + 1$ ise $\varphi(m)$ doğru, yani $\alpha(n+1)$ doğru.

Böylece her n için, $\alpha(n)$'nin doğru olduğunu kanıtlamış olduk.

Öte yandan, teoremin hipotezine göre, her n için, $\psi(n)$ önermesi, yani $\alpha(n) \to \varphi(n)$ önermesi de doğru.

Demek ki her n için $\varphi(n)$ önermesi de doğrudur. □

Bölme Teoremi. *n ve m iki doğal sayı olsun, ama* $m \neq 0$ *olsun. O zaman öyle q ve r doğal sayıları vardır ki*, $n = mq + r$ ve $r \leq m$*'dir.*

Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n < m$ ise $q = 0$ ve $r = n$ alabiliriz.

Şimdi $n \geq m$ olsun ve teoremin n'den küçük sayılar için doğru olduğunu varsayalım. p doğal sayısı $m + p = n$ eşitliğini sağlasın. $p < n$ olduğundan, teorem p için doğru. Demek ki belli bir q ve $r \leq m$ doğal sayıları için $p = mq + r$ eşitliği doğru. Şimdi $n = m + p = m + mq + r = m(q + 1) + r$. Teoremi böylece n için de kanıtlamış olduk. □

Yukarda bulunan q ve r'den birer adet olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz.

Teorem 2'nin Yanlış Bir Kanıtı. Yanlış kanıtlar her zaman yararlıdır. İşte biri. Diyelim teorem yanlış, yani diyelim φ'yi sağlamayan doğal sayılar var. n doğal sayısı φ'yi sağlamayan en küçük doğal sayı olsun. Demek ki her $m < n$ için $\varphi(m)$ doğru, yani $\forall m\ (m < n \to \varphi(m))$ doğru. Teoremin varsayımına göre $\psi(n)$ önermesi doğru, yani

$$\forall m\ (m < n \to \varphi(m)) \to \varphi(n)$$

önermesi doğru. Demek ki $\varphi(n)$ önermesi de doğru. □

Yukardaki kanıt yanlıştır. Çünkü yukardaki kanıt, φ'yi sağlamayan doğal sayılar varsa, o zaman φ'yi sağlamayan en küçük doğal sayının da var olacağını varsayıyor. Oysa biz daha böyle bir şey kanıtlamadık. Kanıtlayacağız şimdi. Göreceğiniz üzere kanıtımız Teorem 2'yi kullanacak.

Teorem 3. *Doğal sayılar kümesinin boş olmayan her altkümesinin bir en küçük öğesi vardır.*

Kanıt: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ olsun. A'nın bir en küçük öğesi olduğunu kanıtlayacağız. Böyle bir öğenin (sayının) olmadığını varsayalım. Teorem 2'yi kullanarak $A = \emptyset$ eşitliğini, yani hiçbir n doğal sayısının A'da olmadığını kanıtlayacağız.

Birinci Adım. 0, A'de değil, çünkü olsaydı o zaman 0 elbette A'nın en küçük öğesi olacaktı, ki biz öyle bir öğe olmadığını varsayıyoruz.

Tümevarım Adımı. Şimdi n'den küçük hiçbir sayının A'da olmadığını varsayalım. O zaman n de A'da olamaz, çünkü olsaydı o zaman n elbette A'nın en küçük öğesi olurdu.

Yukardaki teoreme göre hiçbir doğal sayı A'da olamaz ve A boşkümedir. □

Yukardaki özelliği sağlayan bir tamsıralamaya **iyi sıralama** denir. Demek ki $(\mathbb{N}, <)$ bir iyi sıralamadır.

Sonuç. *Eğer bir $\alpha(n)$ önermesi bir doğal sayısı için yanlışsa, o zaman α'nın yanlış olduğu en küçük bir doğal sayı vardır.* ♣

Kullandığımız Belitler

Daha önceki yazılarda kümeler kuramının birkaç belitini verdik. O belitleri (metinde yer aldığı sırayla değil, bir başka sırayla) yazalım:

1. Boşküme Beliti. Hiç öğesi olmayan bir küme vardır.

2. Eşitlik Beliti. Aynı öğeleri olan iki küme birbirine eşittir.

3. Tanımlanabilir Altküme Beliti. Eğer φ bir özellikse ve x bir kümeyse, x'in sadece ve sadece φ özelliğini sağlayan öğelerini öğe olarak içeren ve bunlardan başka bir öğe içermeyen bir küme vardır.

4. Bileşim Beliti. Eğer x bir kümeyse, sadece ve sadece x'in öğelerinin öğelerinden oluşan bir küme vardır.

5. İki Öğeli Küme Beliti. Eğer x ve y birer kümeyse, öğe olarak sadece x ve y'yi içeren bir küme vardır.

6. Altkümeler Kümesi Beliti. Eğer x bir kümeyse, öğe olarak sadece ve sadece x'in altkümelerini içeren bir küme vardır.

7. Tümevarımsal Küme Beliti. Tümevarımsal bir küme vardır.

8. Temellendirme Beliti. Eğer x boş olmayan bir kümeyse, o zaman x'te $x \cap y = \emptyset$ eşitliğini sağlayan bir y öğesi vardır.

Üçüncü belit, bir tek belit değildir. O belit her φ özelliği için bize ayrı bir belit verir. Yani üçüncü belit, belitten ziyade bir "belit şeması"dır.

Sekizinci beliti hiç kullanmayacağımızdan o belite aslında gereksinimiz yok. İlk dört belitle $\emptyset$'den başka bir küme olduğu kanıtlanamaz. Yedinci belit olmadan sonsuz öğeli bir kümenin olduğu kanıtlanamaz.

Kümeler kuramının başka belitleri de vardır. O belitleri ve ne işe yaradıklarını bir başka sayımızda işleriz.♣