Kapak Konusu: $2 \times 2 = 4$

Sezgisel Anlamda Küme

Bu yazıda bir kümenin ne anlama geldiğini sezgisel olarak anlamaya çalışacağız. Doğal sayıları, hatta diğer sayıları da bildiğimizi varsayacağız. Doğal sayıları ilerde, daha sonra inşa edeceğiz. O zamana dek en azından tanımladığımız kavramlara örnek vermek için doğal sayılara ihtiyacımız olacak ve doğal sayıları hiç çekinmeden kullanacağız.

Bir küme, adına öğe dediğimiz bazı nesneleri içeren bir topluluktur. Örneğin, ülkeler bir küme oluştururlar, bir ülkenin şehirleri bir küme oluşturur, bir şehrin okulları bir küme oluşturur, bir okulun sınıfları bir küme oluşturur, bir sınıfın öğrencileri bir küme oluşturur. Alışveriş listesi de bir küme olarak görülebilir.

Her ülke, ülkeler kümesinin bir öğesidir. Ülkeler kümesini $Ü$ harfiyle, Türkiye'yi de T harfiyle gösterirsek, T'nin $Ü$ kümesinin bir öğesi olduğunu,

$$T \in Ü$$

yazılımıyla gösteririz. Eğer Ankara'yı A ile gösterirsek, Ankara bir ülke olmadığından, A, $Ü$'nün bir öğesi değildir. Bunu da,

$$A \notin Ü$$

olarak gösteririz.

Matematiksel bir kümenin öğeleri de matematiksel nesne olmalılar elbet. Dolayısıyla, yukardaki örnekler matematiksel anlamda küme değildirler. Ama doğal sayılar kümesi matematiksel anlamda bir kümedir. Bu kümenin öğeleri 0, 1, 2, 3 gibi sayılardır. Doğal sayılar kümesi matematikte $\mathbb{N}$ simgesiyle gösterilir. Örneğin $5 \in \mathbb{N}$, ama $5/2 \notin \mathbb{N}$, $-4 \notin \mathbb{N}$.

Öğe olarak sadece 2'yi, 3'ü, 5'i ve 7'yi içeren küme

$$\{2, 3, 5, 7\}$$

olarak yazılır. $\{2, 3, 4\}$ bir başka kümedir; bu son kümenin üç öğesi vardır: 2, 3 ve 4.

{ ve } simgelerine açan ve kapatan **küme parantezi** adı verilir. Küme parantezleri arasına aynı öğeyi elli defa yazmak, o kümede o öğeden elli tane var anlamına gelmez! Aynı öğeden bir kümede ancak bir tane olabilir... Örneğin, $\{a, a, a\}$ kümesinin bir tek öğesi vardır, o da a'dır.

$\{a, b\}$ kümesinin en az bir, fazla iki öğesi vardır. Eğer $a = b$ ise bir, $a \neq b$ ise iki öğesi vardır.

$\{a, b\}$ ile $\{b, a\}$ yazılımları arasında matematiksel olarak bir fark yoktur, ikisi de aynı kümeyi simgeler, çünkü aynı öğeleri vardır. Genel olarak, aynı öğeleri olan iki küme birbirine eşittir. Sözgelimi, eğer

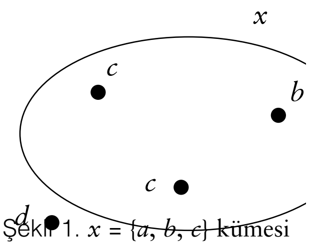
a, 8'den küçük asal sayılar kümesi,

b, $x^4 - 17x^3 + 101x^2 - 247x + 210 = 0$ denkleminin çözüm kümesi,

$c = \{2, 3, 5, 7\}$

ise, o zaman $a = b = c$ eşitlikleri geçerlidir.

Kümeleri Şekil 1'deki gibi yumurta ya da patates biçiminde bir şekille gösteririz. Kümenin öğelerini yumurtanın içine yazarız. Örnekte üç öğeli $x = \{a, b, c\}$ kümesi çizilmiş. $d \notin x$ olduğundan, d, yumurtanın dışına yazılmış.



Şekil 1. $x = \{a, b, c\}$ kümesi

Kimi zaman bir kümenin öğeleri küme olabilirler. Örneğin

$$\{\{0, 3, 5\}, \{0, 2\}\}$$

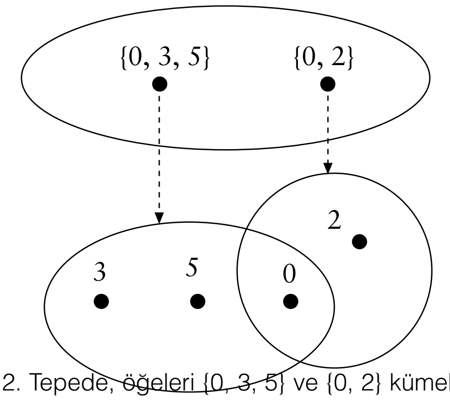
kümesinin $\{0, 3, 5\}$ ve $\{0, 2\}$ kümeleri olmak üzere iki öğesi vardır. Küme olan bu öğelerin de öğeleri vardır. Bu durumu Şekil 2'deki gibi bir şekille gösterebiliriz. Görüldüğü gibi, aynı nesne hem küme hem de öğe olabiliyor. $\{0, 3, 5\}$ bir kümedir, ama bu küme bu örnekte olduğu gibi bir başka kümenin öğesi olabilir.

Bu gibi durumlarda aynı nesneyi aynı şekil üzerinde iki değişik biçimde resmetmekte yarar vardır:

1) Öğe olarak, yani nokta olarak,

2) Küme olarak, yani yumurta biçiminde bir şekille.

Şekil 2'dekinden çok daha karmaşık durumlar olabilir. Sözgelimi $\{\{\{\{0\}\}\}\}$ kümesinin bir öğesi vardır, o da $\{\{\{0\}\}\}$ kümesidir. $\{\{\{0\}\}\}$ kümesinin de bir tek öğesi vardır, o da $\{\{0\}\}$ kümesidir. $\{\{0\}\}$ kümesi-



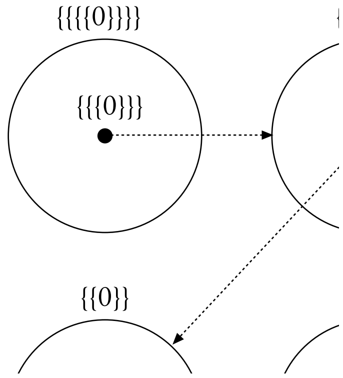
Şekil 2. Tepede, öğeleri {0, 3, 5} ve {0, 2} kümeleri olan iki öğeli küme görünüyor. Bu kümede {0, 3, 5} ve {0, 2} kümeleri birer nokta olarak, yani birer öğe olarak gösterilmiş. Altta, {0, 3, 5} ve {0, 2} kümeleri küme olarak gösterilmiş.

nin de bir tek öğesi vardır, o da {0} kümesidir. {0} kümesinin de bir tek öğesi vardır, o da 0'dır. Bu örneğimiz de Şekil 3'te.

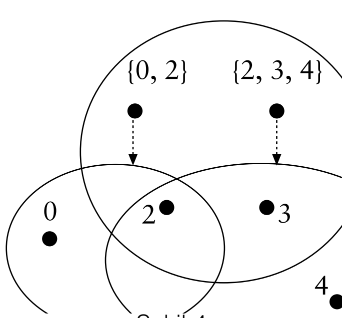
Daha daha tuhaf durumlar olabilir. Sözgelimi şu örneği ele alalım:

$$x = \{\{0, 2\}, \{2, 3, 4\}, 2, 3\}$$

Bu durumu Şekil 4'te çizdik.



Şekil 3



Şekil 4

Görüldüğü gibi her küme hem bir nokta olarak hem de bir patates olarak resmedilebilir.

Daha daha daha tuhaf durumlar olabilir. Sözgelimi öyle bir x kümesi olabilir ki x'in bir tek öğesi vardır ve bu öğe gene x'tir... Yani $x = \{x\}$ olabilir. O zaman $x \in x \in x \in \ldots$ olur. Ben "olabilir" dedim diye olacak değil, ama böyle bir durum gene de olabilir, olmaması için görünürde bir neden yok, hayal etmesi zor bir durum bile olsa...

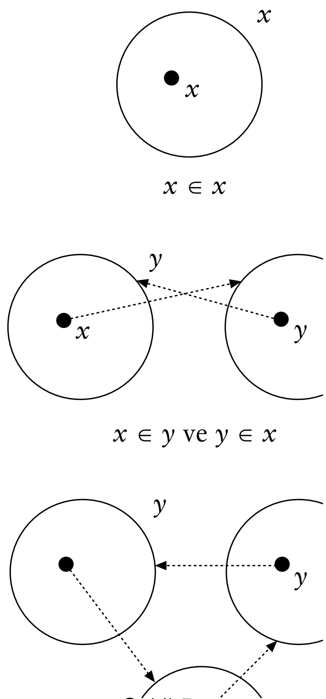
Hatta şöyle bir durum olabilir:

$$x = \{y\} \text{ ve } y = \{x\}.$$

O zaman $x \in y \in x \in y \in \ldots$ olur. Ya da şöyle bir durum olabilir:

$$x = \{y\},\ y = \{z\} \text{ ve } z = \{x\}.$$

Şekil 5'te görülen bu durumlar (bu satırların yazarının bilmediği bir nedenden) kümeler kuramında yasaklanır. Bunu daha sonra, sayfa 38-40'da göreceğiz



Şekil 5

Alıştırmalar.

1. Eğer $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$ ise $x = z$ ve $y = t$ eşitliklerini kanıtlayın.

2. Eğer $\{x, \{x, y\}\} = \{z, \{z, t\}\}$ ise, $x = z$ ve $y = t$ olmak zorunda mıdır?

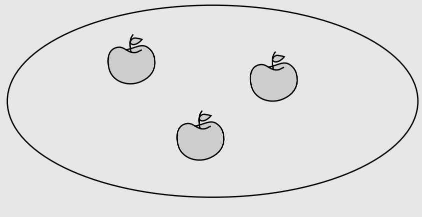
3. Ülkemizde basılan bir ders kitabında "sınıfımızın güzel kızları"nı öğe olarak içeren bir kümeden sözediliyordu. Neden böyle bir küme (ne matematikte, ne sosyolojide, ne de herhangi bir bilimsel dalda) olamaz?

4. $x \in x$ ilişkisini sağlayan bir x kümesinin varlığının kabul edilir olup olmadığı konusunda arkadaşlarınızla felsefi bir tartışmaya girin. Matematiksel olarak kimsenin haklı çıkamayacağını bilerek...

5. İnsanoğlunun 2005 yılına kadar hiç düşünmediği ve düşünmeyeceği, hiçbir biçimde tanımlamadığı ve tanımlamayacağı, aklına hiç gelmeyen ve hiç gelmeyecek doğal sayılar vardır elbet. Bu doğal sayılardan oluşan kümenin en küçük öğesi (sayısı) vardır. Bu sayı hakkında ne düşünüyorsunuz? ♣

İlkokul Kitaplarından Yaygın Bir Yanlış

Birçok ilkokul matematik kitabında şu tip sorular görülür: "Aşağıdaki kümede kaç öğe vardır?"



Doğru yanıt kitaba göre üçtür. Oysa üç elma da tıpatıp aynı olduğundan doğru yanıt bir olmalıdır.