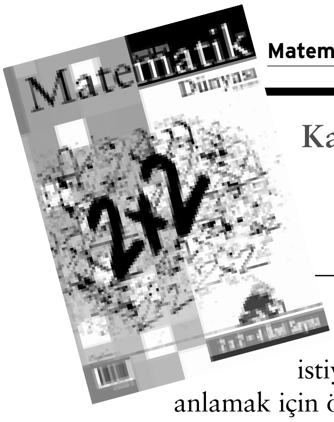

Kapak Konusu: $2 \times 2 = 4$

Doğal Sayılardan Ne İstiyoruz?

Doğal sayıları, yani 0, 1, 2, 3, ... gibi sayıları anlamak istiyoruz. Elbette doğal sayıları anlamak için önce doğal sayıların matematiksel tanımını vermeliyiz. Ama matematiksel tanımı vermeden önce de doğal sayıların nesini anlamak istediğimizi bilmeliyiz. Çünkü tanımı ona göre yapacağız.

Herhalde, en azından bir doğal sayıdan sonra hangi doğal sayının geleceğini (verilen doğal sayının **ardılını**) bilmek istiyoruz, yani x verilmişse $x + 1$ sayısını bulabilmek ve $x \mapsto x+1$ fonksiyonunun özelliklerini bilmek istiyoruz. Sonra, sanırım doğal sayıları toplamayı ve çarpmayı anlamak istiyoruz. Toplamayı ve çarpmayı anlamadan olmaz. Ta ilkokuldan beri başımızın eti yendi toplama ve çarpma için... Örneğin

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

eşitliğini kanıtlayabilmek istiyoruz. Hatta belki 5^3 gibi bir sayının üssünü almayı da becerebilmeliyiz. Ayrıca hangi sayının küçük, hangi sayının büyük olduğunu da anlamalıyız, örneğin $x^2 \geq x$ eşitsizliğini kanıtlayabilmeliyiz.

Anlamak istediklerimizi sıralayalım: $x + 1$ işlemi, toplama, çarpma, üs alma işlemleri ve eşitsizlik ilişkisi. Başka varsa söyleyin.

Eşitsizlikten başlayalım. Doğal sayılardaki $x \leq y$ eşitsizliğini toplama cinsinden yazabiliriz:

$x \leq y$ ancak ve ancak $x + z = y$ eşitliğini sağlayan bir z doğal sayısı varsa.

Görüldüğü gibi eşitsizliği toplamadan bedava elde ettik. Dolayısıyla, eğer toplamayı anlarsak eşitsizliği de anlarız. Böylece anlamak istediklerimizin listesinden eşitsizliği silebiliriz. Artık sadece $x + 1$ işlemini, toplamayı, çarpmayı ve üs almayı anlamak istiyoruz.

Şimdi üs almaya bakalım.

$$x^0 = 1 \text{ ve } x^{y+1} = x^y \times x$$

eşitliklerinden, çarpmayı ve $x + 1$ işlemini biliyorsak güç almayı da bildiğimizi anlarız. Nitekim bu eşitliklerden örneğin şu çıkar:

$$2^3 = 2^{2+1} = 2^2 \times 2 = 2^{1+1} \times 2 = (2^1 \times 2) \times 2 =$$
$$(2^{0+1} \times 2) \times 2 = ((2^0 \times 2) \times 2) \times 2 = ((1 \times 2) \times 2) \times 2.$$

Çarpmayı biliyorsak, sağ taraftaki çarpmayı hesaplayabiliriz ve 2^3 işleminin sonucunu bulabiliriz. Demek ki anlamak istediklerimizin listesinden üs almayı da silebiliriz. Artık sadece $x + 1$ işlemini, toplamayı ve çarpmayı anlamak istiyoruz.

Sıra geldi çarpmaya... Çarpmayı da toplama cinsinden yazabiliriz:

$$x \times 0 = 0 \text{ ve } x \times (y + 1) = x \times y + x$$

Nitekim, yukardaki eşitlikleri kullanarak ve toplamayı ve $x + 1$ işlemini bildiğimizi varsayarak, örneğin 2×3 işleminin sonucunu bulabiliriz:

$$\begin{aligned} 2 \times 3 &= 2 \times (2 + 1) = 2 \times 2 + 2 = 2 \times (1 + 1) + 2 \\ &= (2 \times 1 + 2) + 2 = (2 \times (0 + 1) + 2) + 2 \\ &= ((2 \times 0 + 2) + 2) + 2 = ((0 + 2) + 2) + 2. \end{aligned}$$

Toplamayı biliyorsak, en sağdaki işlemi hesaplayıp 2×3 işleminin sonucunu bulabiliriz. Demek ki çarpmayı da bilmek istediklerimizin listesinden silebiliriz. Artık sadece $x + 1$ işlemini ve toplamayı anlamak istiyoruz.

Şimdi de toplamaya bakalım. Eğer $x + 1$ işlemini yapabiliyorsak, toplamayı da yapabiliriz. Nitekim

$$x + 0 = x \text{ ve } x + (y + 1) = (x + y) + 1$$

eşitlikleri bize toplama yapmamızı sağlar. Örneğin,

$$\begin{aligned} 2 + 3 = 2 + (2 + 1) &= (2 + 2) + 1 \\ &= (2 + (1 + 1)) + 1 \\ &= ((2 + 1) + 1) + 1. \end{aligned}$$

Eğer x verildiğinde $x + 1$ işlemini yapabiliyorsak, o zaman sağdaki işlemi yapıp $2 + 3$ işleminin sonucunu bulabiliriz. Demek ki toplamayı da bilmek istediklerim listesinden silebiliriz. Artık sadece $x + 1$ işlemini anlamak istiyoruz.

Geriye fazla bir şey kalmadı. Toplamayı, çarpmayı, üs almayı, eşitsizliği anlamak için $x + 1$ işlemini anlamalıyız. $x + 1$ işleminin özellikleri bize toplamanın, çarpmanın, üs almanın, eşitsizliğin tüm özelliklerini verecek.

Toplamanın, çarpmanın, üs almanın ve eşitsizliğin özelliklerini kanıtlayabilmek için $x + 1$ işleminin hangi özelliklerini bilmeliyim? İşte önemli soru bu. Ancak bu soruyu yanıtladıktan sonra tanımlara geçebiliriz. $x \mapsto x + 1$ işleminin hangi özelliklerine ihtiyacımız olduğunu bir sonraki yazıda söyleyeceğiz.

Bir nokta okurun dikkatinden kaçmış olabilir: $x + 1$ işlemini anlamak için 1 diye bir sayıyı anlamak gerekmiyor. Biz sadece "artı bir" işleminden sözediyoruz, 1 sayısından sözetmiyoruz. Hatta "artı bir" değil "artıbir" işleminden sözediyoruz. Bundan sonra $x + 1$ yerine $S(x)$ yazalım ve "artı bir" yerine "bir sayının ardılı" terimini kullanalım. Böylece kafa karıştıran 1'den kurtulmuş oluruz. ♣