

Dikkat Paradoks Var!

Ali Nesin* / anesin@bilgi.edu.tr

Zenon'un Paradoksları

Zenon, İ.Ö. 5. yüzyılda yaşamış ve bugün üzerine pek az bildiğimiz Eski Yunanlı bir filozoftur. Ne yazık ki günümüze hiçbir yapıtı kalmamıştır. Zenon üzerine bildiklerimizi daha çok Eflatun'un Parmenides adlı ve Aristo'nun Fizik adlı yapıtlarına borçluyuz.

Zenon kolay kolay yutulmayacak bir düşünce-nin savunucusu olan Parmenides'in sadık bir öğrencisiydi. Parmenides şu inanılmaz düşünceyi savunuyordu: *Gerçek tektir ve değişmez. Çokluk, değişim ve hareket aslında yokturlar ve duyularımızın bizi kandırmasından kaynaklanırlar...*

Zenon hocasının felsefesiyle alay edenleri susturmak için dört paradoks geliştirir. Zenon'un günümüze kalmasını sağlayan aşağıda açıklamaya çalışacağım (ve ne derece ciddi olduklarını göstermek amacıyla savunacağım) işte bu dört paradokstur. Bugün, yani 2500 yıl sonra bile, bu dört paradoks üzerine tartışma dinmemiştir ve gün geçtikçe filozoflar bu konuda daha fazla düşünce üretmektedirler. Bertrand Russell, Henri Bergson, Alfred North Whitehead, Zenon'un paradokslarını konu etmiş çağdaş filozoflardan biridir. Tolstoy Savaş ve Barış'ında Zenon'un paradokslarından sözeder.

Aşil'le Kaplumbağa. Zenon, paradokslarının birinde, çok hızlı koşmasıyla tanınan yarıtanrı Aşil'le kaplumbağayı yarıştıır. Kaplumbağa Aşil'den çok daha yavaş olduğundan, Aşil'in önünden başlar yarışa. Zenon, Aşil'in kaplumbağayı hiç yakalayamayacağını savunur.

Gerçekten de Aşil'in kaplumbağayı yakalaya-

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi. Yazı, yazarın Matematik ve Doğa adlı kitabından derlenmiştir.

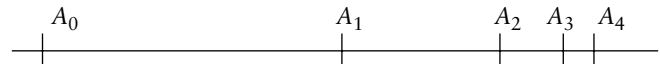
bilmesi için, önce kaplumbağanın yarışa başladığı ilk noktaya erişmesi gerekmektedir. Aşil bu noktaya eriştiğindeyse, kaplumbağa biraz daha ilerde olacaktır. Şimdi Aşil, kaplumbağanın bulunduğu bu yeni noktaya erişmelidir. Aşil, kaplumbağanın bulunduğu bu yeni noktaya vardığıdaysa, kaplumbağa biraz daha ilerde olacaktır, çünkü kaplumbağa durmamaktadır. Bu böyle sürer gider ve Aşil kaplumbağaya hiçbir zaman erişemez.

Yaşamda böyle olmaz demeyin. Parmenides de, Zenon da, sizin gibi, yaşamda Aşil'in kaplumbağayı yakalayacağını biliyorlar. Ancak, gördüğümüzün gerçek olmadığını, duyularımızın bizi aldattığını ileri sürüyorlar.

Bu paradoks üzerine biraz düşünelim. Aşil yarışa kaplumbağanın 100 metre gerisinden başlasın.

Aşil saniyede 100 metre koşsun. Kaplumbağa da saniyede 10 metre koşsun. Varsayalım ki öyle... Aşil'in yarışa başladığı noktaya A_0 adını verelim. Aşil bir saniye sonra

kaplumbağanın bulunduğu ilk noktaya, A_1 noktasına erişecektir. Bu bir saniyede kaplumbağa 10 metre yol alacaktır ve A_2 noktasına varacaktır. Aşil A_2 noktasına 1/10 saniye sonra varacaktır. Bu 1/10 saniyede kaplumbağa 1 metre gitmiş olacaktır. Aşil bu 1 metreyi, 1/100 saniyede koşacaktır...



Paradoks olur da matematikçiler boş durmu? Matematikçiler bu paradoksu çözmüşler. Şöyle çözmüşler:

Aşil A_0 'dan A_1 noktasına 1" koşar
Aşil A_1 'den A_2 noktasına 1/10" koşar

Aşil A_2 'den A_3 noktasına $1/100''$ koşar
 Aşil A_3 'ten A_4 noktasına $1/1000''$ koşar
 ...

Demek ki, der matematikçiler, Aşil,

$$1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + \dots$$

saniyede kaplumbağaya erişir. Basit bir aritmetik (ve analiz) bu sonsuz toplamın $10/9$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla Aşil kaplumbağayı $10/9$ saniye sonra, yani 2 saniyeden, hatta 1,2 saniyeden az bir zamanda yakalar.

Filozoflar bu yanıtta pek hoşnut kalmazlar. Her şeyden önce sonsuz toplamdan rahatsız olurlar. Matematikçilerin matematik yaparken sonsuz sayıda sayıyı toplamalarına sözetmezler, ama gerçek yaşamdan alınmış bir probleme uygulanmasına karşı çıkarlar. Matematiğin gerçek yaşama her zaman uygulanabildiği nerden biliniyor?

Matematik, doğa yasalarını bulmaya çalışır. Bunu da oldukça iyi başarır. Örneğin matematik sayesinde uçaklar, trenler, binalar yapılır, hatta aya gidilir. Matematiğin birçok uygulaması vardır. Bu uygulamalar matematiğin doğayı anlamamızı sağlayan başarılı bir yöntem olduğunu gösterir. Ama her yere her zaman matematik uygulanabilir mi?

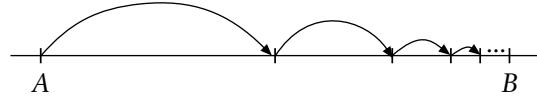
Yukardaki hesap, Aşil'in kaplumbağayı $10/9$ saniyede yakalayacağını göstermiyor. Yukardaki hesap gösterse gösterse Aşil'in kaplumbağayı **eğer yakalarsa** $10/9$ saniyede yakalayacağını gösteriyor. Aşil'in kaplumbağayı yakalayıp yakalamadığını bilmiyoruz ki, ne zaman yakalayacağı sorusunu sorup yanıtlayalım... Sorumuz, Aşil'in kaplumbağayı ne zaman yakalayacağı değil, yakalayıp yakalayamayacağı...

Zenon'un bu paradoksunda bir başka sorun daha var. O da şu: Aşil kaplumbağayı yakalamak için sonsuz sayıda iş yapmalı; önce A_1 noktasına gitmeli, sonra A_2 noktasına gitmeli, sonra A_3 noktasına gitmeli... Sonsuz sayıda iş yapabilir miyiz? İşte en önemli soru bu. Matematikçi kendi düşünsel dünyasında sonsuz sayıda sayıyı toplayabilir, ama biz, yaşamda, sonsuz sayıda sayıyı toplayamayız. Sonsuz sayıda iş yapamayız. En azından sonsuz sayıda iş yapabileceğimizi düşünmek oldukça zor.

Yoksa Aşil kaplumbağaya erişmek için sonlu sayıda mı iş yapıyor? Bu soruya geçmeden önce Zenon'un ikinci paradoksundan söz edelim.

İkiye Bölünme. Zenon, salt Aşil'in kaplumbağayı yakalayamayacağını söylemekle yetinmiyor. Aşil'in bir noktadan bir başka noktaya gidemeyeceğini de söylüyor. Diyelim Aşil A noktasında ve B noktasına gidecek.

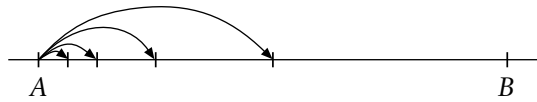
Aşil A 'dan B 'ye gitmek için önce yolun yarısına gitmeli. Yolun yarısına gittikten sonra kalan yolun yarısına gitmeli. Daha sonra kalan yolun yarısına... Bu böylecene sonsuza değin sürer. Diyelim A 'yla B arasındaki uzaklık 1 metre. Aşil önce $1/2$ metre gitmeli. Gittiğini varsayalım. Geriye $1/2$ metre kalır. Şimdi Aşil kalan bu $1/2$ metrenin yarısına gitmeli, yani $1/4$ metre daha gitmeli. Geriye $1/4$ metre daha kalır. Aşil bu kalan $1/4$ metrenin yarısına gitmeli, yani $1/8$ metre daha gitmeli... Daha sonra $1/16$ metre daha gitmeli...



Aşil sonsuz sayıda iş yapamayacağından B noktasına varamaz...

Havada uçan bir oka bakalım. Okun sonsuz sayıda iş yaptığını, yani sonsuz sayıda noktadan geçtiğini varsayalım. Beynimiz okun sonsuz sayıda noktadan geçişini algılayabilir mi? Bunu düşünmek oldukça zor. Olsa olsa beynimiz okun havada sonlu sayıda fotoğrafını çekiyordur ve bu fotoğrafları bir sinema şeriti gibi gözümüzün önünden geçiriyordur. Bu konuya birazdan geleceğim. Paradoksa geri dönelim. Ama şimdilik, beynimizin dışdünyayı sonlu biçimde algıladığını aklımızda tutalım.

Okur belki sonsuz sayıda iş yapabileceğimizi düşünüyordur: birinci iş, ikinci iş, üçüncü iş... O zaman sonsuz iş yapmaya sondan başlayalım! Birinci paradoksa çok benzeyen bu ikinci paradoksu biraz değiştirip, Aşil'in, bırakın B noktasına gide memesini, yerinden bile kımlıdayamayacağını da



kanıtlayabiliriz. Gerçekten de Aşil'in A 'dan B 'ye gidebilmesi için önce yarı yola gitmesi gerekir. Yolun yarısına gidebilmesi için önce yolun dörtte birine gitmesi gerekir. Ama daha önce yolun sekizde birine gitmesi gerekir... Daha önce de on altıda birine gitmesi gerekir... Dolayısıyla Aşil A noktasın-

dan öteye adımını atamaz bile. İlerleyebileceği bir nokta yoktur ki! Gideceği her noktanın önce yarısına gitmesi gerekmektedir.

Yoksa A 'yla B arasında ve A 'dan hemen sonra gelen bir nokta mı var? Galiba öyle...

Paradoksun ikiye bölmekten kaynaklandığı kesin. Aşıl'ın gitmesi gereken fiziksel uzaklığı hep ikiye bölüyoruz. Demek ki fiziksel uzaklığı (uzayı) durmadan ikiye bölemeyiz. Demek ki bir zaman sonra fiziksel uzaklığı ikiye bölemememiz gerekir. İkiye böle böle, bir zaman sonra öylesine küçük bir uzaklık elde ederiz ki, elde edilen bu minimumnacık uzaklık bir kez daha ikiye bölünemez. Bir başka deyişle, **uzay sürekli değildir**. Uzay, bölünmeyen en küçük uzay parçacıklarından oluşmuştur. 20. yüzyılın parçacık kuramı da bu yönde düşünmemiz gerektiğini söylemiyor mu zaten? Bu uzay parçacıklarına **uzaybirim** diyelim¹.

Uzayın uzaybirimlerden oluştuğunu kanıtladık (!)

Her uzaklık sonlu sayıda uzaybirimden oluşur.

Üçüncü Paradoks. Zenon'un üçüncü paradoksuna göre, hareket yoktur, hiçbir şey hareket edemez. Uçan bir ok ele alalım örnek olarak. Okun hareket ettiğini sanıyoruz değil mi? Zenon yanıldığımızı kanıtlıyor.

Ok her an durmaktadır. İnanmazsanız okun havada bir fotoğrafını çekin. Fotoğrafta okun durduğunu göreceksiniz. Her an durmakta olan ok hep durmaktadır. Öyle değil mi? Okun hareket edebilmesi için en az bir an hareket etmesi gerekmektedir. Oysa ok her an durmaktadır.

Uzayın sürekli olamayacağını yukarda gördük. Uzay küçük, çok küçük, bölünemeyen uzaybirimlerinden oluşmuştur. Okun bir uzaybirimi uzunluğunda olduğunu varsayalım. Uzaybirim uzunluğundaki ok, bir uzaybiriminin içinde hareket edemez, çünkü okun o uzaybiriminde hareket edebilmesi için, okun uzaybiriminden daha kısa olması gerekir ki, uzaybirimden daha kısa bir nesne olmayacağını biliyoruz. Her uzaybiriminde hareket-siz duran ok, hep hareketsizdir.

Sinema da öyle değil midir? Sinema ekranında yürüyen bir insan aslında yürümeyen binlerce insan resminin gözümüzün önünden hızla geçmesi değil midir? Doğada hareket de aslında hareketsizlik değil midir²?

Uçan ok her an durmaktadır. Ama bir sonraki uzaybiriminde varolmaktadır. Bergson'un da dedi-

ği gibi, aynen sinema ekranında yürüyen bir insan örneği, ok bize hareket edermiş gibi görünmektedir. Oysa her an durmaktadır.

Dördüncü Paradoks. Zenon'un son paradoksunu anlamak kolay değil. Yukarda da dediğim gibi Zenon'dan yazılı bir yapıt yok elimizde. Zenon'un paradokslarını bize aktaran Aristo. Aristo'nun aktardığı biçim pek anlaşılır gibi değil. Bu yüzden dördüncü paradoksun çeşitli yorumları var. Vereceğim yorum Aristo'nun aktardığı yorum değil ama ona çok yakın.

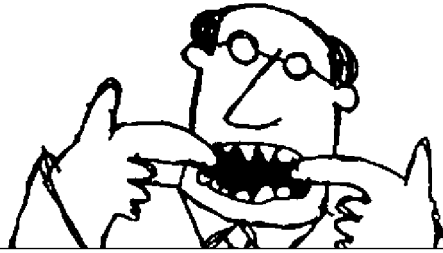
Yukarda, uzayın sürekli olmadığını, bölünmeyen **uzaybirim**lerden oluştuğunu kanıtladık, daha doğrusu Zenon kanıtladı. Şimdi aşağıdaki şekle bakalım.

A	
	B

Her kare bir uzaybirimini simgelesin. Sol üst köşede A nesnesi, sağ alt köşede B nesnesi var. A ve B aynı anda ve aynı hızla "hareket" etsinler. A sağa, B sola gitsin. Bir zaman sonra A sağdaki karede, B de soldaki karede olur.

Şimdi paradoksal soruyu soralım: A ve B nerede karşılaştılar?

Hiç karşılaşmadılar! Çünkü aralarında karşılaşılabilecekleri bir yer yok! ♦



¹ Bergson bu paradoksları ve aşağıda açıklayacağım ok paradoksunu şöyle çözmeyi öneriyor: Bir hareketin belirlenmesi için hareketin başladığı ve bittiği noktaların verilmesi gerekmektedir. Okun hareketini ikiye bölmek demek, bir hareketin değil, iki hareketin olduğunu göstermek demektir. Okun hareketini ikiye bölmeye hakkımız yoktur. Okun bir ve bir tek hareketi vardır. Okun aldığı yolu ikiye bölebiliriz ama okun hareketini ikiye bölemeyiz. ² Bunların benim düşüncelerim olmadığını, Zenon'un düşünceleri olduğunu anımsatırım. Okuru kışkırtmak amacıyla, kendimi Zenon'un yerine koyarak Zenon'un paradokslarını savunur görünüyorum. Giderek de Zenon'a inanıyorum...