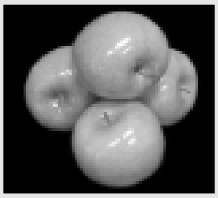
Bilgisayarınıza Ne Kadar Güvenirsiniz?

İbrahim C. Arkut* - Refik C. Arkut**
iarkut@gau.edu.tr - rca@ttnet.net.tr

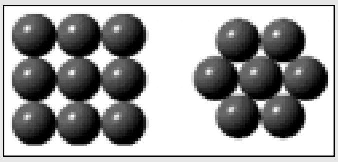
Intel Pentium. Öğrencilere, "Size her iki aritmetik işleminden birini yanlış hesaplayan bir bilgisayar hediye edilmek istense, bilgisayarı kabul eder misiniz?" diye sorduğumuzda, genelde yanıt olumsuzdur, hediye kabul edilmez. Beklenen bu yanıt alınınca, "hediye edilen bilgisayarın milyarda bir yanlış yanıt verdiğini" varsayalım deriz ve bu kez sınıfın tümü bilgisayara güvenip hediyeyi kabul eder. İşte o zaman can alıcı son sorumuzu yöneltiriz: "Tatile gitmek için havaalanına gittiğinizde, bineceğiniz uçağın iniş sistemlerinin milyarda bir hatalı yanıt veren bilgisayarla kontrol edildiğini öğrendiniz. Şimdi kendi özgür iradenizle o uçakla seyahat eder misiniz?" Yanıt: sessizlik... Öğrencilerden ses çıkmaz...

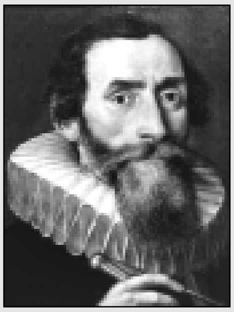
Bu makalenin amacı, yukardaki senaryoya uygun, yani insan zekâsının sınırında bir bilgisayarın sonuçlarını matematiksel olarak irdelemek. Ayrıca, "bir teoremin matematiksel kanıtı bilgisayarda yapılan hesaplara dayanıyorsa ve daha şık, daha matematiksel, daha kavramsal bir çözümü henüz bilinmiyorsa veya belki de hiç yoksa, kanıta inanmalı mıyız?" sorusuna da dokunacağız, örneğin Dört Renk Teoremi (bknz. sayfa 27) ve Kepler Sanısı'nın (yandaki kare) kanıtlarına güvenmeli miyiz?

Lynchburg Koleji profesörlerinden Thomas Nicely, asal sayılarla uğraşırken, Pentium chip'inin tasarım sorunlarını bulup halka açıklayan kişi olarak bilinir. 1993'te ilk Pentium chip'i üretildiğinde Intel için her şey yolunda gidiyordu. Kişisel bilgisayarlar için söz verilen işlemci hızı ve gücü yerine getirilmişti. Ancak Nicely'nin açıklamasıyla Intel bir kabus yaşamaya başladı. Pentium bazen aritmetik işlemlerini yanlış yapıyordu. Bir anlamda tüm bilgisayarlar bölme işleminde yanlışlık yaparlar. Kesirli sayılarla bölme işleminde yuvarlamadan dolayı küçük hatalar verdiği bilinir. Örneğin 1/3 = 0.33333... eşitliğinde sonsuz sayıda 3'ler dizisi yerine sonlu sayıda 3 kullanılır. Bu türden yuvarlamalarda en az hata için sayının ne zaman yukarı ne zaman aşağı yuvarlatılacağı bilinir. Genellikle 10 ile 20 ondalık kesirler seviyesinde aritmetik işlem yapılır. Sıradan hesaplamalarda yuvarlama hatası pek önemli olmamakla birlikte milyarlarca ardışık hesaplama gerektiren çalışmalarda hesaplama hatası ihmal edilemeyecek seviyeye çıkabilir. Örneğin 10uncu basamağa



Kepler Sanısı, günlük dile çevirdiğimizde, bir sandığa en çok sayıda elmanın, tahmin edilebileceği ve manavların da yaptığı gibi, alt kattaki birbirine komşu elmaların ortasına bir elma koyarak yerleştirileceğini söyler. Aslında elmaları kübik ve altıgensel denilen iki değişik yerleştirme biçimi vardır. Her iki yerleşimde de uzayın $\pi/3\sqrt{2}$'lik bir bölümü elmayla doldurulur. Yüzyıllar boyunca bu sanı kanıtlanamamış, birçok kez yanlış kanıt verilmiştir. Son olarak, Hales 1997-2002 yılları arasında toplam 250 sayfalık birkaç makaleyle teoremi kanıtladığını öne sürmüş ve makalesini en ünlü matematik dergilerinden biri olan Annals of Mathematics dergisine sunmuştur. On iki kişilik bir heyetin hakemlik yaptığı makale büyük bir olasılıkla bir iki yıl içinde yayımlanacak. Ancak kanıt, verilerin 3 GB'lık bir yer kapladığı bilgisayar programı kullandığından, Kepler Sanısı'nın matematiksel kesinlikle kanıtlandığı söylenemez. Makale yayımlandığında, derginin editörlerinin bu konuda makalenin girişine bir iki söz yazmaları bekleniyor.





Kepler

* Girne Amerikan Üniversitesi.
** Kadir Has Üniversitesi.

kadar doğru olan 10 milyar kesirli sayının toplamının doğruluk açısından hiçbir güvenirliği kalmaz. Uygulamada, istatistiksel rastgele-yürüyüş davranışına göre 5 basamaklı doğru kabul edilebilir sonuç için yukarı ve aşağı yuvarlama adetlerinin bir hesap süresince hemen hemen eşit olmaları gerekir. Başka bir deyişle eğer bir aritmetik hesap sürecinde on tane yuvarlama yapılacaksa bunlardan rastgele beşinin yukarı diğer beşinin aşağı yuvarlatılması en sağlıklı sonucu verir.

Pentium'un tasarım sorununa gelince... Kesirli sayılarla işlemlerde 19 basamağa kadar hassasiyeti garanti eden pentium bazen çok daha az hassas yanıtlar verebiliyordu. Tasarımında olması gereken bölme algoritmasındaki bazı kısımlar ihmal edilmişti. Bunun sonucunda hata kendini beşinci basamaktan sonraki hesaplarda, yani oldukça erken kendini gösteriyordu. Hassasiyet açısından, tasarlanandan 100 milyar kez daha kötü sonuç veren Pentium chip'indeki eksiklik 1994 yazında düzeltildi, ancak satılan bir iki milyon chip için herhangi bir önlem alınmadı. Intel'in bu büyük hatası milyarda bir ortaya çıktığına göre, bu, "kimkime dumduma, kimin umurunda" yaklaşımından başka bir şey değildir. Bundan da Intel patronlarının uçağa pek düşünmeden bindikleri anlaşılıyor.

Asal Sayılar. Öklid, sonsuz sayıda asal sayı olduğunu kanıtlamıştı. Öklid'in şık olarak nitelenen kanıtı, sonlu sayıda asalın çarpımına 1 eklendiğinde elde edilen sayının çarpılan asalların hiçbirine bölünemeyeceği olgusuna dayanıyordu; her sayının en az bir asal böleni olduğundan, sonlu bir sayı listesi her asalı içeremez.

1896'da, Charles de la Vallée Poussin ve Jacques Hadamard, birbirlerinden habersiz, Asal Sayı Teoremi'ni kanıtladılar. Asal Sayı Teoremi, verilen herhangi x gerçel sayısı için x'ten küçük yaklaşık $x/\ln x$ kadar asal sayı olduğunu söyler. Örneğin, $x = 100$ alınırsa $100/\ln 100 \approx 22$ bulunur. Gerçekte 100'den küçük 25 asal olduğundan formül fena sayılmaz.


Jean de la Vallée Poussin 1866-1962

Asal Sayılar Teoremi'ne dayanarak asal sayıların birçok gizemi çözülmüştür. Çözülemeyenler arasında ünlü "ikiz asal sayılar" problemini burada ele alalım. 3 ve 5 gibi, 5 ve 7 gibi, 29 ve 31 gibi aralarında 2 fark olan sayılara **ikiz asallar** denir.

İkiz asalların sayısının sonlu ya da sonsuz olduğu bilinmiyor. Sonsuz oldukları, hatta x'ten küçük ikiz asal sayısının $x/\ln^2 x$ ile orantılı olduğu sanılıyor. Norveç matematikçi Viggo Brun 1919'da ikiz asal sayısının $100x/\ln^2 x$ den küçük olduğunu kanıtlamıştır; daha sonra bu değer $6x/\ln^2 x$'e kadar indirilmiştir. Henüz x'ten küçük ikiz asal sayısının en az $x/\ln^2 x$ olduğuna dair bir sonuç elde edilememiştir.

Brun, ikiz asal sayı çiflernin tersinin toplamının, yani

$B = (1/3 + 1/5) + (1/5 + 1/7) + (1/11 + 1/13) + \ldots$

toplamının sonlu olduğunu gösterdi. Elbet bundan sonlu tane ikiz asal sayısının olduğu sonucu çıkmaz, sonsuz tane sayı toplandığında sonlu bir toplam verebilir. Ama bu, en azından ikiz asalların o kadar da çok olmadığını gösteriyor. (Asal sayıların terslerinin toplamının sonsuz olduğu bilinmektedir.)

Brun toplamı B'nin yaklaşık bir değerini bulmak, ikiz asalların nasıl oluştukları bilinmediği için hiç de kolay değildir. Örneğin yoğun asal sayıların başladığı bir yerden önce Brun toplamını yaklaşık tahmin etmek için toplamayı durdursanız, yaklaşımınız, bu yoğun asal sayıla-

Mertens'in İkinci Teoremi'ne göre, belli bir B_1 sabiti için,

$\lim_{n \to \infty} (\sum_{p,\ x\text{'ten küçük asal}} 1/p - \ln(\ln x) - B_1) = 0.$

Bundan da $\sum_{p \text{ asal}} 1/p = \infty$ çıkar, Euler'in Merten'den bir yüzyıl önce kanıtladığı sonuç. B_1'in değeri 0,2614972128 diye başlar.

Brun Teoremi'ne göre sonlu olan

$B = (1/3+1/5) + (1/5+1/7) + (1/11+1/13) + \ldots$

sayısının değerinin $1{,}9021605778 \pm (2{,}1 \times 10^{-9})$ olduğunu 10^{14}'e kadar olan ikiz asal sayıları teker teker bularak Nicely 1996'da bulmuştur. Hesapları sırasında Intel Pentium'un bir hata yaptığını farketmiştir. Daha sonra B'nin yaklaşık değeri daha da iyileştirilmiştir.

Segal 1930'da aralarındaki farkın $2d$ olduğu asal sayıların terslerinin toplamının sonlu olduğunu kanıtlamıştır. Eğer bu sayı B_d olarak gösterilirse, Wolf B_d'nin aşağı yukarı $2/d$ olduğu sanısını ortaya atmıştır. Wolf sanısı B_1'i 1,902… yerine aşağı yukarı 2, B_2'yi 1,1970449... yerine 1 olarak veriyor. Wolf sanısını $\lim_{d \to \infty} dB_d = 2$ olarak yorumlayabiliriz.

rı göz önüne alamayacağından, tahmininiz çok kötü çıkabilir.

1974'te D. Shanks ve J. Wrench Jr., Brun toplamını yaklaşık hesaplamak için ilk iki milyon asal sayılardaki tüm ikiz asal sayılara baktılar. Aynı zamanda R. Brent (Australya) 100 milyara kadar olan tüm ikiz asal sayıları (224376048 çift) listeleyerek Brun toplamı olarak 1.90216054 sayısını buldu. Nicely daha hassas hesaplama için 100 trilyona kadar çıkarak 1.9021605788 değeri bulundu.

O günden sonra bilgiişlemsel sayılar teorisinde çalışanlar bilgisayarlarını ikiz asal sayılar arttığı zaman Brun toplamı fazla değişmediği için pek çalıştırmadılar.

1993'te Nicely, Brun'ün toplamını ilk beş adet "486" chip'li PC ile daha sonra bir adet Pentium makinesi kullanarak tekrar hesaplamaya karar verir. Buraya kadar kötü bir niyet yok! Aksine daha önce "süper bilgisayarlar" kullanılarak yapılan bu hesaplar artık kişisel bilgisayarlarla yapılabilecekti. Ama Nicely'yi endişelendiren bulunacak sonucun ne derece güvenilir olduğuydu. İkiz asal sayı çiftlerinin terslerinin toplamı PC ile hesaplanırken Brent'in sonuçlarıyla aynı olması ve daha ötesine geçilmesi için kullanılan programın ve işletim sisteminin hatasız olması gerekiyordu. Bunu sağlamak için her bilgisayar asal sayı tersini bulurken önce "floating point ünitesi" kullanılarak ondalık kesirden sonra 19 basamağa kadar hesaplama yaptı ve daha sonra A. Lenstra'nın gelişitirdiği ultra-hassasiyet algoritması kullanarak 26 rakamlı hassasiyete inildi. İnildi de ne mi oldu? Daha önce $\pi(x)$ (= x'e kadar asal sayıların sayısı) için bilinen değerden farklı sonuç elde edildi. Bunun nedeni uzun çalışmalardan sonra ultra-hassasiyet hesaplamasında yuvarlama hatasının beklenenden daha süratli depolandığı tespit edildi. Sonuçta bu hatanın nerden kaynaklandığı anlaşıldı[3] ve hata düzeltildi. Daha fazla emin olmak için Nicely ultra-hassasiyeti 53 rakama çıkardı. Yine de 486 makinesiyle pentium makinesi değerleri son 20 rakamı farklı vermeye devam ediyordu. Bunun da nedeni Pentium makinesinin 19 rakam hassasiyet verecek yerde 824633702441 ve 824633702443 asal sayı çiftinin terslerinin toplamında yalnız 9 rakamlı hassasiyet vermesiydi. Düzeltmek için özel hata düzeltme yazılımıyla Pentium bilgisayarında makine dili seviyesinde hata arandı. Hatanın devam etmesi ve başka Pentium makinelerinde de aynı hatanın kalması üzerine Intel Pentium chip'inin bölmeyi doğru yapmadığı anlaşıldı.

Intel hatanın müşterilerini etkilemediği iddiasıyla sonunda hatayı kabul etti. Nicely Intel'in 1995'teki düzeltilmiş ve geliştirilmiş yeni Pentium chip'ini kullanarak ilk 100 trilyon sayı için 133.780.321.665 adet ikiz asal sayı çifti olduğunu ve Brun toplamının aşağı yukarı 1,9021605778 olduğunu dünyaya ilan etti. Bir yıl sonra, Alman bilim adamları Martin Kutrib ve Jörg Richtein (Giessen Üniversitesi) aynı sonuçları bularak asal sayı hesaplamadaki doğruluğu teyit ettiler.

O gün bugün bu bilim adamları hesaplamalarının aynı kaldığını, farklıysa da nasıl düzeltileceğini bulmak için buldukları değerleri değiş tokuş yapmaktadırlar.

Sonuç Yerine. Milyarda bir hata olabileceği bu kadar açık şekilde gösterilmesine karşın, günümüzde genel eğilim (sokaktaki insanın eğilimi), "sonuç bilgisayardan geliyorsa doğrudur" şeklindedir. Yanlış!

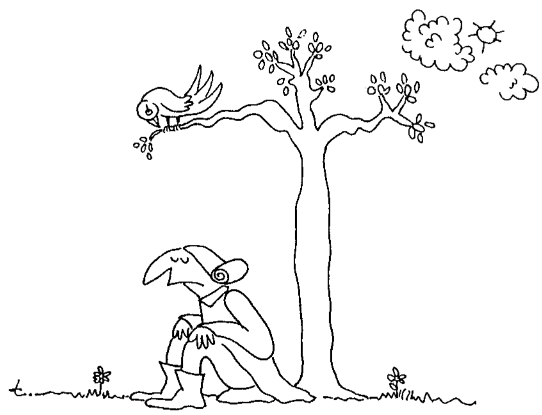
Kanıtta bilgisayar programı kullanıldığında kanıta güvenmeli mi sorusuna gelince... Zor soru. En azından teoremin doğru olduğuna dair bir ipucu. Bu durum makinelere teslim olma demek olmadığını burada belirtmek istiyoruz. Belki zarif çözüm bulununcaya kadar durumu kabulleniyoruz demek en iyisi. Dört Renk Problemi ve Kepler Sanısı'nı bir başka yazıda ele alırız. ♦

Kaynakça:

Bu yazı, "Thomas Nicely, *Divide and Conquer,* AMS, What's Happening in the Mathematical Sciences, vol.3,1996, sayfa 39-47" makalesinden derlenmiştir.

www.trnicely.net

www.mathworld.wolfram.com/Brunsconstant.html



"O GÜN NEWTON YANLIŞ AĞACIN ALTINDAYDI..."

3 Borland C++ 4.02 derleyicisinden.