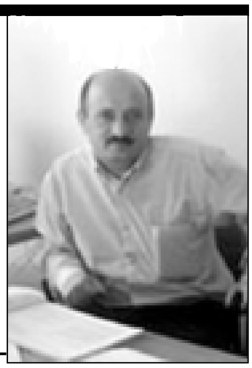
# Problemler ve Çözümleri



Refail Alizade*
*rafailalizade@iyte.edu.tr*

Bu, bir yıl sürecek bir yarışmadır. Grup halinde, okul olarak ya da bireysel olarak katılabilirsiniz.

Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Ayrıca lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

Her sorunun çözümünü ayrı bir kâğıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenciyseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla İzmir adresine 15 Ocak 2004 tarihine kadar adıma gönderiniz.

**Doğru yanıt yollayanlar:**
Y277 ve Y279: Yaşar Dönmez (Turgutlu Lisesi), Mustafa Dönmez (Halil Kale Fen Lisesi).

## Alıştırma Problemleri

**A286.** İki basamaklı $ab$ sayısı $c$'ye, $bc$ sayısı $a$'ya ve $ca$ sayısı da $b$'ye bölünecek şekilde birbirinden ve sıfırdan farklı üç $a$, $b$, $c$ rakamı var mıdır?

**A287.** $m(ACB) \neq 45°$ olmak üzere $ABC$ dar açılı üçgeninde $AM$ ve $BN$ yükseklikleri çizilmiştir. $MA$ ve $NB$ ışınları üzerinde, $MK = MB$ ve $NT = NA$ olmak üzere $K$ ve $T$ noktaları alınmıştır. $KT \parallel MN$ olduğunu kanıtlayınız.

**A288.** Bir toplulukta birbiriyle tanışık iki kişinin ortak tanıdığı bulunmuyor; birbiriyle tanışık olmayan iki kişinin ise tam iki ortak tanıdığı bulunur. Bu topluluktaki tüm kişilerin tanıdık sayılarının aynı olduğunu kanıtlayınız.

**A289.** $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ denkleminin, aritmetik dizi oluşturan dört kökünün bulunmasını sağlayan tüm $a$ gerçel sayılarını bulunuz.

**A290.** Yirmi birbirinden farklı gerçel sayıdan oluşan $M$ kümesinde $a < b$ olmak üzere her $a, b \in M$ için $a < -x < b$ olacak şekilde bir $x \in M$ bulunur. $M$ kümesinde kaç pozitif sayı olabilir?

* İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü öğretim üyesi.

## Yarışma Problemleri

**Y286.** $p$ bir asal sayı, $r$ de $p$'nin 210'a bölünmesinden elde edilen kalandır. $r$'nin bileşik sayı olduğu ve iki tam karenin toplamı şeklinde gösterilebildiği bilinmektedir. $r$'yi bulunuz.

**Y287.** $ABCD$ karesinin $BC$ ve $CD$ kenarları üzerinde, $m(AKB) = m(AKL)$ olacak şekilde sırasıyla $K$ ve $L$ noktaları alınmıştır. $m(KAL)$'yi bulunuz.

**Y288.** Bir uluslararası konferansta bir araya gelen dokuz matematikçiden her üçünden en az ikisi aynı dili biliyor ve her biri en fazla 3 dil biliyor. Bu dokuz matematikçiden en az üçünün aynı dili bildiğini kanıtlayınız.

**Y289.** Her $x \in \mathsf{N}$ ve her $y \in \{f(x) \mid x \in \mathsf{R}\}$ için $f(x-y) = f(x) + xy + f(y)$ eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

**Y290.** Bir ülkedeki on kentin bazı kentlerini birleştiren tek yönlü havayollarıyla her kentten diğer her kente bir veya birkaç havayolunu kullanarak ulaşmak mümkündür. Kentlerin birinden çıkıp tüm kentleri dolaşarak aynı kente dönmek için gerekli olan en az havayolu sayısı $n$ ise, $n$'nin en büyük değeri ne olabilir?

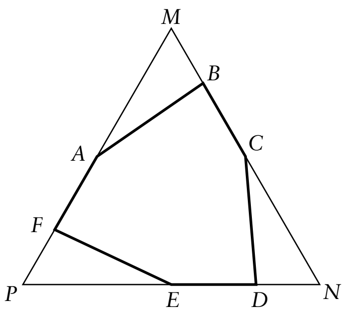
## Eski Sorulara Çözümler (2003-I)

**A276.** *$x^2 - 6y^2 = 2003$ eşitliğini sağlayan $x$ ve $y$ tamsayıları var mıdır?*

**Çözüm.** Yoktur. Eşitliği sağlayan $x$ ve $y$ tamsayıları bulunsaydı, bu sayılar $x^2 - 6y^2 \equiv 2003 \pmod 3$, yani $x^2 \equiv 2 \pmod 3$ denkliğini sağlayacaktı. Bir tamsayının karesi 3 modunda sadece 0 ve 1 değerlerini alabildiğinden bu mümkün değildir.

**A277.** *$ABCDEF$ dışbükey altıgeninde $AB = CD = EF$, $m(A) = m(C) = m(E)$ ve $m(B) = m(D) = m(F)$ ise, $BC = DE = FA$ eşitliklerini gösteriniz.*

**Çözüm.** $FA$, $BC$, $DE$ kenarlarını $M$, $N$, $P$ nokta-




larında kesişene kadar uzatalım. Kolayca görüleceği üzere $MBA$, $NDC$ ve $PFE$ üçgenleri eşittir. Dolayısıyla $m(M) = m(N) = m(P)$. Böylece $MNP$ üçgeni eşkenardır. Buradan $BC = DE = FA$ elde edilir.

**A278.** *Bir sınıftaki öğrencilerin yedide biri erkektir. Sınıfa on üç yeni öğrenci gelince erkeklerin sayısı artar ancak sınıftaki yüzdesi azalır. Kızların sayısı kaç arttı?*

**Çözüm.** Sınıftaki erkek öğrencilerin sayısı $x$, yeni gelen erkek öğrencilerin sayısı da $y$ olsun ($y > 0$). Erkeklerin yüzdesi azaldığından

$$\frac{x+y}{7x+13} < \frac{1}{7},$$

bundan da $y \le 1$ elde ederiz. $y > 0$ olduğundan $y = 1$'dir. Kızların sayısı 12 artmıştır.

**A279.** *Bir kutuda yeşil, sarı ve kırmızı elmalar bulunur. Bunlar Amasya, Bursa ve Gülbahçe elmalarıdır. Yeşil elmaların sayısı Amasya elmalarının sayısından, Amasya elmalarının sayısı sarı elmaların sayısından, sarı elmaların sayısı Bursa elmalarının sayısından, Bursa elmalarının sayısı kırmızı elmaların sayısından, kırmızı elmaların sayısı da Gülbahçe elmalarının sayısından daha fazladır. Böyle bir durum olabilir mi?*

**Çözüm.** Yeşil, sarı ve kırmızı elma sayısını sırasıyla $y$, $s$, $k$ ile, Amasya, Bursa ve Gülbahçe elma sayısını sırasıyla $A$, $B$, $G$ ile ve toplam elma sayısını da $t$ ile gösterelim. O halde $y > A > s > B > k > G$ eşitsizliği, buradan da $t = y + s + k > A + B + G = t$ çelişkisi elde edilir. Böyle bir durum olamaz.

**A280.** *$P(x)$, katsayıları tamsayı olan bir polinomdur ve üç değişik $x$ tamsayısı için değeri 1'dir. $P(x)$'in tamsayı kökünün olmadığını kanıtlayın.*

**Çözüm.** $P(a) = P(b) = P(c) = 1$ ise, $Q(x) := P(x) - 1$ polinomu için $Q(a) = Q(b) = Q(c) = 0$'dır. Bezout teoreminden $Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)R(x)$ olacak şekilde bir tamsayı katsayılı $R(x)$ polinomu bulunur. Şimdi $P(x)$'in bir $d$ tamsayı kökünün bulunduğunu varsayalım. O halde

$$-1 = P(d) - 1 = Q(d) = (d-a)(d-b)(d-c)R(d)$$

dir. Demek ki $d-a$, $d-b$, $d-c$ sayıları ya 1 ya da $-1$, dolayısıyla bu sayıların ikisi birbirine eşit olmak zorunda, yani $a$, $b$, $c$ sayılarının ikisi birbirine eşit olmak zorunda. Dolayısıyla $P(x)$'in tamsayı kökü olamaz.

**Y276.** *$m$ ve $n$ tamsayıları 1'den büyük. $n^3 - 1$ sayısı $m$'ye, $m - 1$ de $n$'ye bölünür. $m = n^{3/2} + 1$ ve $m = n^2 + n + 1$ eşitliklerinden birinin doğru olması gerektiğini kanıtlayın.*

**Çözüm.** $n^3 - 1$ sayısı $m$'ye bölündüğünden,

$$n^3 - 1 = km$$

olacak şekilde bir $k \ge 1$ tamsayısı bulunur. $m - 1$ sayısı $n$'ye bölündüğünden $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$'dir. O halde $k \equiv -1 (\mathrm{mod}\ n)$'dir, dolayısıyla $k = sn - 1$ olacak şekilde bir $s \ge 1$ tamsayısı bulunur. $sn - 1$ sayısı $n^3 - 1$'i böldüğünden $(sn-1)|(n^3 - 1 - sn + 1)$ ve buradan da ($n$ ile $sn - 1$ aralarında asal olduğundan)

$$(sn-1)|(n^2 - s)$$

elde edilir. Bu durumda $(sn-1)|(sn^2 - s^2)$'dir ve $sn^2 - s^2 = n(sn-1) + n - s^2$ eşitliğinden

$$(sn-1)|(n - s^2)$$

elde edilir.

Şimdi $s = n^{1/2}$ ise,

$$m = \frac{n^3-1}{k} = \frac{n^3-1}{sn-1} = \frac{n^3-1}{n^{3/2}-1} = n^{3/2} + 1$$

elde edilir. Bundan böyle $s \ne n^{1/2}$ olsun.

$$1 < m = \frac{n^3-1}{sn-1}$$

ilişkilerinden $s < n^2$ olduğu anlaşılır.

Eğer $1 < s < n^{1/2}$ ise, $0 < n - s^2 < sn - n < sn - 1$, ama o zaman da $sn - 1$ sayısı $n - s^2$'yi bölemez. Eğer $n^{1/2} < s < n$ ise, $0 < s^2 - n < sn - 1$'dir, dolayısıyla $s^2 - n$ sayısı $sn - 1$'e bölünemez. Eğer $n \le s < n^2$ ise, $0 < n^2 - s \le sn - s < sn - 1$'dir, dolayısıyla $n^2 - s$ sayısı $sn - 1$'e bölünemez. Tek bir durum kalıyor: $s = 1$. Demek ki $k = sn - 1 = n - 1$ ve

$$m = \frac{n^3-1}{k} = \frac{n^3-1}{n-1} = n^2 + n + 1$$

dir. Böylece ya $m = n^{3/2} + 1$ ya $m = n^2 + n + 1$'dir.

**Y277.** *Ters yazılımıyla çarpıldığında, son üç basamağı sıfır olan sekiz basamaklı bir sayı veren tüm dört basamaklı sayıları bulun.*

**Çözüm.** Sayının ters yazılımıyla çarpımı $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ sayısına bölündüğünden ve sayının ters yazılımı 0'la başlayamayacağından (dolayısıyla sayının kendisi 0'la bitemeyeceğinden) sayının kendisi veya ters yazılımı 125'e bölünen tek sayı olacak, ve sırasıyla ters yazılımı veya kendisi 8'e bölünecek ama 5'e bölünmeyecek. 125'e bölünen tek sayı $a125$, $b375$, $c625$, $d875$ şeklinde olabilir. Bunların ters yazılımları olan $521a$, $573b$, $526c$, $578d$ sayılarının 8'e bölünmesi için $a = b = 6$, $c = d = 4$ olmalıdır.

**Yanıt:** 6125, 6375, 4625, 4875, 5216, 5736, 5264, 5784.

**Y278.** $2n + 1$ *kişiden oluşan bir toplulukta, her* $n$ *kişilik grup için, bir grubun tüm bireylerini tanıyan ve bu grupta bulunmayan biri vardır. Bu toplulukta herkesi tanıyan birinin varlığını kanıtlayın.*

**Çözüm.** Önce $k$'ye göre tümevarımla, her $k = 2, 3, ..., n+1$ için hepsi birbiriyle tanışan $k$ kişinin bulunduğunu kanıtlayalım. $k = 2$ durumu açıktır. $k \le n$ için sorunun doğru olduğunu, yani hepsi birbiriyle tanışan $k$ kişi bulunduğunu varsayalım. Bu $k$ kişiye $n - k$ kişi de ekleyerek bunların hepsini tanıyan bunların dışında bir kişi bulunduğunu görürüz. Bu kişiyi de alarak hepsi birbiriyle tanışan $k + 1$ kişilik bir grup elde ederiz. Tümevarım bitti. O halde hepsi birbiriyle tanışan $n + 1$ kişi bulunur: $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$. Geri kalan $n$ kişinin herbiriyle tanışan, bunların dışında (yani $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$ kişilerinden biri olan) bir kişi (diyelim $A_m$) bulunur. $A_m$ tüm $2n + 1$ kişiyle tanışıyor.

**Y279.** *Tekdüze (monoton) artan* $f : [0,1] \to \mathrm{R}$ *fonksiyonu* $f(0) = 0$ *eşitliğini ve* $f(1) > 1$ *eşitsizliğini sağlıyor ve ayrıca eğer* $a, b, a + b \in [0,1]$ *ise* $f(a) + f(b) \ge f(a+b)$ *eşitsizliği gerçekleştiriyor.*

$$s(n) = f(1) + f(1/2) + f(1/3) + ... + f(1/n)$$

*dizisinin sınırlı olmadığını gösterin.*

**Çözüm.** $a(n) = 1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n$ dizisi sınırlı değil (bknz. MD 2003-II Sayfa 67). Gerçekten, her $k$ pozitif tam sayısı için

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} \ge k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$$

olduğundan,

$$a(2^m) = 1 + 1/2 + (1/3+1/4) + (1/5+1/6+1/7+1/8) + ... + (1/(2^{m-1}+1) + ... + 1/2^m) \ge 1 + m/2$$

eşitsizliği sağlanır, dolayısıyla $a(n)$ sınırlı değil. Her $n = 1, 2, ...$ için $s(n) \ge c \cdot a(n)$ olacak şekilde $n$'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti bulursak, $s(n)$'nin de sınırsız olduğunu göstermiş oluruz.

Her $x \in [0, 1/2]$ için,

$$f(2x) = f(x+x) \le f(x) + f(x) = 2f(x) \qquad (*)$$

eşitsizliği sağlanır.

Her $x \in (0, 1]$ için $f(x) \ge f(1)x/2$ eşitsizliğinin sağlandığını göstereceğiz. Bunu, $n$'ye göre tümevarımla her $x \in [1/2^n, 1/2^{n-1}]$ için göstereceğiz. Eğer $n = 1$ ise, $x \in [1/2, 1]$ için, $f(x) \ge f(1/2) \ge f(1)/2 \ge f(1)x/2$ elde ederiz (ikinci eşitsizlikte (*) uygulanmıştır). Eşitsizliğin $[1/2^n, 1/2^{n-1}]$ aralığında doğru olduğunu varsayalım. $x \in [1/2^{n+1}, 1/2^n]$ ise, $2x \in [1/2^n, 1/2^{n-1}]$ olduğundan, $2f(x) \ge f(2x) \ge f(1)x$, buradan da $f(x) \ge f(1)x/2$ elde ederiz. Her $x \in (0, 1]$ sayısı $[1/2^n, 1/2^{n-1}]$ aralıklarından birinde bulunduğundan $f(x) \ge f(1)x/2$ eşitsizliği $(0, 1]$ aralığında doğrudur. Şimdi $c = f(1)/2$ alırsak,

$$s(n) = f(1) + f(1/2) + ... + f(1/n) \ge c \cdot 1 + c \cdot (1/2) + ... + c \cdot (1/n) = c \cdot a(n)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

**Y280.** *Her üç elemanından birinin yine o üçlüden bir başkasına bölündüğü sonlu bir pozitif tamsayılar kümesi verilmiştir. Bu kümenin tüm elemanlarının, aynı renkten olan her iki elemandan biri diğerini bölecek şekilde iki renge boyanabileceğini kanıtlayınız.*

**Çözüm.** Sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayarak en küçüğünü $a$ rengine boyayalım ve bu sayıya $a_1$ diyelim. İkinci sayı $a_1$'e bölünüyorsa, bunu da $a$ rengine boyayalım ve bu sayıya $a_2$ ile gösterelim. Üçüncü sayı $a_2$'ye bölünüyorsa, yine $a$ rengine boyayalım ve $a_3$ ile gösterelim vs. Bunları sağlamayan ilk sayıyı $b$ rengine boyayalım ve $b_1$ ile gösterelim. Koşuldan dolayı, bundan sonra gelen sayı ya $a$ rengindeki sayıların en büyüğüne ya da $b_1$'e bölünecek. Sadece birine bölünüyorsa, bölündüğü sayının rengine boyayalım ve uygun numarayı verelim. Her ikisine bölünüyorsa, geçici olarak $c$ rengine boyayalım ve $c_1$'le gösterelim. Bir sonraki sayı $c_1$'e bölünüyorsa, $c$ rengine boyayalım ve $c_2$ ile gösterelim vs. Bu işlemler sırasında sayılar biterse, $c_i$'lerin hepsini $a$ veya $b$ rengine boyarız. Diyelim ki, $c_1 | c_2 | ... | c_n$ ve bir sonraki $x$ sayısı $c_n$'ye bölünmüyor. $a$ ve $b$ rengindeki en büyük sayılar birbirlerine bölünmediğinden, $x$ bunlardan birine bölünecek. $x$'i bölündüğü sayının rengine (ikisine de bölündüğü takdirde herhangi birinin rengine), $c_1, c_2, ..., c_n$ sayılarını da diğer renge boyayalım. Bu durumda yine $a$ ve $b$ rengindeki en büyük sayılar birbirine bölünmeyecek ve aynı renkten olan sayılar birbirine bölünecek. Aynı işlem sayılar bitene kadar devam ettirilebilir. ♦