# Saklı Bilgisi Olmayan Sonlu Oyunlar

Oya Oynar

Eğer bir oyun sonlu sayıda hamlede bitiyorsa ve oyunun her evresinde hamle sırası gelen oyuncunun sonlu sayıda hamle seçeneği varsa, o oyuna **sonlu oyun** denir. Örneğin satranç sonlu bir oyundur. Çünkü satrancın her anında her oyuncunun sonlu sayıda hamle seçeneği vardır ve her satranç oyunu ya iki oyuncudan birinin zaferiyle ya da beraberlikle biter[1]. Pişti, poker gibi kâğıt oyunları genellikle biter, yani sonlu oyunlardır. Öte yandan tavla sonlu bir oyun değildir, her iki oyuncunun da birer kırığı olabilir ve – kuramsal olarak, uygulamada olmayabilir – sonsuza değin gele atabilirler.

Eğer bir oyunda, her oyuncu kendisinin ve öbür oyuncunun gelecekte yapabileceği (ve yapamayacağı) bütün hamleleri biliyorsa, o oyunun **saklı bilgisi** olmadığı söylenir. Satrançta saklı bilgi yoktur. Öte yandan tavlada saklı bilgi vardır: Atılacak zarı iki oyuncu da bilmez. Pokerde, piştide ve briçte de saklı bilgi vardır, bir oyuncunun elindeki kâğıtları öbür oyuncu bilmez.

**Teorem [Zermelo].** *Eğer iki kişi arasında oynanan bir oyun sonluysa ve oyunun saklı bilgisi yoksa ve oyun beraberliğe izin vermiyorsa, iki oyuncudan birinin kazanan stratejisi vardır.*

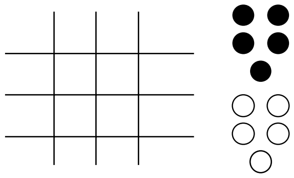
Satrançta beraberlik olduğundan, satranca bu teoremi uygulayamayız. Öte yandan, beraberlik durumunda siyahın kazandığını varsayacak olursak, Teorem'den şu sonuç çıkar:

**Teorem'in Bir Sonucu.** *Satrançta ya beyazın kazandığı ya da siyahın en az berabere kalabildiği bir strateji vardır.*

Beyazın mı yoksa siyahın mı böyle bir stratejisi olduğu bilinmiyor. Satranç öylesine karmaşık bir oyun ki varolduğu bilinen bu strateji bulunamıyor.

**Kanıt:** Sonlu bir oyunumuz var. Diyelim O oyunu.

O sonlu olduğundan, öyle bir $n$ sayısı vardır ki, en fazla $n$ hamlede oyun biter. Bu sayıların en küçüğüne O oyununun uzunluğu adını verelim. Yani O oyununun uzunluğu en uzun süren O oyununun hamle sayısı. Örneğin üç taş oyununun uzunluğu 9'dur. Çünkü üç taş oyunlarında en uzun oyun 9 hamledir.



Teoremimizi O oyununun uzunluğu üzerine tümevarımla kanıtlayacağız.

Uzunluğu 0 olan oyunlar zaten bitmiş oyunlardır. Ya birinci oyuncu kazanmıştır ya da ikinci. Eğer birinci oyuncu kazanmışsa, birinci oyuncunun kazanan stratejisi vardır. Eğer ikinci oyuncu kazanmışsa, ikinci oyuncunun kazanan stratejisi vardır.

Şimdi oyunumuzun uzunluğu 0'dan büyük olsun. Bu uzunluğa $n$ diyelim. Tümevarım varsayımıyla, teoremimizin uzunluğu $n$'den küçük olan oyunlar için doğru olduğunu varsayıyoruz.

Anlatımda kolaylık sağlaması için oyunda ilk hamleyi bizim yapacağımızı varsayacağız. Kendimize $A$ diyeceğiz, öbür oyuncuya $B$.

Her oyun gibi oyunumuz da bir hamleden sonra bir başka oyuna dönüşür, üstelik uzunluğu daha kısa olan bir oyuna. İlk hamle için $k$ seçeneğimizin olduğunu varsayalım. Demek ki O oyununda ilk hamleyi yaptığımızda kendimizi $k$ oyundan birinde buluruz. Bir hamle yapıldığından, elde edilen bu $k$ oyunun herbirinin uzunluğu en fazla $n - 1$'dir. Dikkat edilmesi gereken bir nokta var: Bu $k$ oyundan herbirine $B$ başlayacak. Eğer bu elde edilen $k$ oyundan birinde ikinci oyuncunun kazanan stratejisi varsa o oyunu üreten hamleyi yaparız. Böylece $B$ oyunu kazanamaz ve kazanan bir stratejimiz olur. Eğer böyle bir hamle yoksa, yani türeyen $k$ oyunun herbirinde birinci oyuncu kazanıyorsa, ne yaparsak yapalım $B$ kazanır, kazanan stratejimizi yoktur, $B$'nin vardır. $\square$

1 Satrancın sonlu hamlede bitmesi için şu iki kural konulmuştur: a) Şimdi anımsayamadığım belli bir sayıda hamle boyunca en az bir piyon yerinden kımıldamazsa oyun berabere biter, b) Bir piyon gidebildiği en son kareye geldiğinde ata, file, kaleye ya da vezire dönüşür.