Gerçel Sayıların Toplamsal Altgrupları

Nurettin Ergun*, Cavit Hafızoğlu** ve Ali Nesin***

Bu yazıda, gerçel sayıların çıkarma altında kapalı ve boş olmayan, yani

$$\text{her } x, y \in A \text{ için } x - y \in A$$

özelliğini sağlayan $A \subseteq \mathbb{R}$ altkümeleriyle ilgileneceğiz. Bu tür gerçel sayı kümelerine $\mathbb{R}$'nin **toplamsal altgrubu** denir. "Toplamsal altgrup" yerine, daha kısa olsun diye "grup" sözcüğünü kullanacağız. Hemen birkaç (toplamsal) grup örneği verelim.

Örnekler: $\{0\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ kümelerinin herbiri birer gruptur. Eğer $x \in \mathbb{Z}$ bir gerçel sayıysa, $A = x\mathbb{Z} = \{xn : n \in \mathbb{Z}\}$ bir gruptur. Burada, $x = 0$ alırsak $\{0\}$'ı, $x = 1$ alırsak $\mathbb{Z}$'yi buluruz. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ bu türden değildir. Eğer $x, y \in \mathbb{Z}$ ise,

$$A = x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z} := \{xn + ym : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

kümesi de bir gruptur. Bu son örneği genelleştirebiliriz: x ve y gibi iki sayı alacağımıza x, y ve z gibi üç sayı alabiliriz, hatta k değişik sayı alabiliriz...

Grupları önce cebirle anlamaya çalışacağız. Cebirin yetmediği yerde analize başvuracağız. Önce çok temel bir sonuç:

Önsav 1. *A bir grupsa,* $0 \in A$, $-A = A$ *ve A toplama altında kapalıdır.*

Kanıt. Boşküme olmadığından, A'da en az bir eleman var, diyelim $a \in A$. Çıkarma altında kapalı olduğundan, $0 = a - a \in A$. Önsavın birinci kısmı kanıtlandı. Şimdi $a, b \in A$ olsun. 0, A'da ve A çıkarma altında kapalı. Demek ki $-b = 0 - b \in A$. Bu da önsavın ikinci yarısı. Bundan da $a + b = a - (-b) \in A$ çıkar. □

Yukarda $x\mathbb{Z}$ ve $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$ örneklerini gördük. Birinci tip örnek oldukça basit: belli bir x sayısının tam katları. İkinci tip örnekleri algılamak daha zor. Örneğin $5\mathbb{Z} + (3/2)\mathbb{Z}$ nasıl bir kümedir? Ya $\pi\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$? Bu kümeler, belli bir $z \in \mathbb{Z}$ için $z\mathbb{Z}$ kümesine eşit midir? Daha genel olarak, x ve y gerçel sayıları verilmişse, $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$ kümesi, belli bir $z \in \mathbb{Z}$ için $z\mathbb{Z}$ kümesine eşit olabilir mi? Olursa ne zaman olur?

Önsav 2. *Eğer x ve y kesirli sayılarsa,* $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$ *grubu belli bir* $z \in \mathbb{Z}$ *için* $z\mathbb{Z}$*'ye eşittir.*

Kanıt: $x = 0$ ya da $y = 0$ ise, sorun yok. Bundan böyle $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ olsun. $x\mathbb{Z} = (-x)\mathbb{Z}$ olduğundan, x ve y'nin negatif olmadıklarını varsayabiliriz. $x = a/b$ ve $y = c/d$ olacak biçimde a, b, c, d pozitif tamsayılar seçelim. Şimdi önsavımızı doğruladığını kanıtlayacağımız z kesirli sayısını tanımlayalım: $z = (ad, bc)/bd$ olsun. Burada, (ad, bc) sayısı ad'yle bc'nin en büyük ortak bölenidir.

Önce $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z} \subseteq z\mathbb{Z}$ ilişkisini kanıtlayalım. Sol taraftaki kümeden bir α sayısı alalım. Demek ki, belli $n, m \in \mathbb{Z}$ tamsayıları için $\alpha = xn + ym$. Şimdi x ve y yerine a/b ve c/d koyalım: $\alpha = (adn + bcm)/bd$ elde ederiz. Ama (ad, bc) sayısı hem ad'yi hem de bc'yi bölüyor, yani belli $u, v \in \mathbb{Z}$ için $ad = u(ad, bc)$ ve $bc = v(ad, bc)$. Dolayısıyla

$$\alpha = (ad, bc)(un + vm)/bd = z(un + vm) \in z\mathbb{Z}.$$

Şimdi de $z\mathbb{Z} \subseteq x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$ ilişkisini kanıtlayalım. Sol taraftan bir α elemanı alalım. Demek ki belli bir $n \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha = zn = (ad, bc)n/bd$. Öte yandan (ad, bc) sayısı ad ve bc'nin en büyük ortak böleni olduğundan, belli $u, v \in \mathbb{Z}$ tamsayıları için $(ad, bc) = uad + vbc$ eşitliği geçerlidir (yan sayfanın üstündeki kareye bakın.) Dolayısıyla $\alpha = (uad + vbc)n/bd = (a/b)un + (c/d)vn = xun + yvn \in x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$. □

Sonuç 3. $x, y \in \mathbb{R}$ *olsun. Eğer* $y \neq 0$ *ise ve* $x/y \in \mathbb{Q}$ *ise, belli bir* $z \in \mathbb{R}$ *için* $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z} = z\mathbb{Z}$.

Kanıt: $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z} = y((x/y)\mathbb{Z} + \mathbb{Z})$ ve Önsav 2'ye göre $(x/y)\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ kümesi, belli bir $q \in \mathbb{Q}$ için $q\mathbb{Z}$'ye eşit. Demek ki $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z} = y((x/y)\mathbb{Z} + \mathbb{Z}) = yq\mathbb{Z}$. □

$x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$ kümesinin ne zaman $z\mathbb{Z}$ biçiminde yazılacağını bulduk ama, ne zaman yazılamayacağını bulamadık. Bunun için biraz analiz yapmamız gerekecek.

$A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer her gerçel $x < y$ sayı çifti için, $x < a < y$ eşitsizliğini sağlayan bir $a \in A$ varsa, A kümesine ($\mathbb{R}$'de) **yoğun** denir. Örneğin $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri yoğundur. $x\mathbb{Z}$ kümeleri yoğun değildir, çünkü örneğin 0'la x arasında $x\mathbb{Z}$'nin elemanı yoktur.

$x\mathbb{Z}$ kümeleri yoğun değiller ama $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$ kümeleri yoğun olabilirler. Her zaman olmasalar da bazen yoğun olabilirler. Şu soruyu yanıtlayacağız: $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$ kümeleri ne zaman yoğundurlar? Bir tanıma ve bir önsava daha gereksiniyoruz.

* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi. *nergun@istanbul.edu.tr*
** İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.
*** İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.

Teorem. *a ve b her ikisi de sıfır olmayan iki doğal sayı olsun. d, a ve b'nin en büyük ortak böleni olsun. O zaman, belli $u, v \in \mathbb{Z}$ için $d = ua + vb$ eşitliği geçerlidir.*

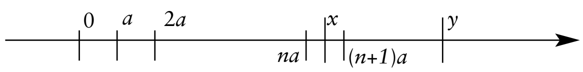
Kanıt: Eğer $a = 0$ ya da $a = 1$ ise, kanıt kolay. Bundan böyle $a > 1$ olsun. a üzerinden tümevarıma başvuracağız. b'yi a'ya bölelim (doğal sayılarda bölme yapıyoruz): $b = aq + r$ ve $0 \le r < a$ olsun. Elbette a ve b'yi bölen bir sayı hem a'yı hem r'yi böler. Öte yandan, a ve r'yi bölen bir sayı da hem a'yı hem b'yi böler. Demek ki d, a ve r'nin de en büyük ortak bölenidir. $r < a$ olduğundan, tümevarım varsayımına göre, belli u ve v tamsayıları için $d = ua + vr$ eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla $d = ua + vr = ua + v(b - aq) = (u - vq)a + vb$. ■

$A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $0 < a < \varepsilon$ ilişkisini sağlayan bir $a \in A$ elemanı varsa, 0, A'nın bir **sağdan yoğunlaşma noktası**dır. Kolaylık olsun diye bu yazıda "sağdan" sıfatını kullanmayacağız. Örneğin 0, {1/2, 1/3, 1/4, ...} kümesinin yoğunlaşma noktasıdır, ama $\mathbb{Z}$'nin değildir.

Önsav 4. *Bir grubun yoğun olması için yeter ve gerek koşul 0'ın grubun yoğunlaşma noktası olmasıdır.*

Kanıt: Gruba A diyelim. Önce A'nın yoğun olduğunu varsayalım. $\varepsilon > 0$ olsun. Demek ki $0 < a < \varepsilon$ eşitsizliklerini sağlayan bir $a \in A$ var, yani 0, A'nın bir yoğunlaşma noktası. Bu kolaydı.

Şimdi 0'ın A'nın bir yoğunlaşma noktası olduğunu varsayalım. $x < y$ iki gerçel sayı olsun. x'le y arasında A'nın bir a elemanını bulacağız. Eğer $x < 0 < y$ ise $a = 0 \in A$ alabiliriz (Önsav 1). Bu eşitsizlikler doğru değilse ya $0 < x < y$ ya da $x < y < 0$ doğrudur.



$0 < x < y$ eşitsizliğini varsayalım, diğeri çok benzer. $y - x > 0$ olduğundan, yoğunlaşma noktası tanımında $\varepsilon = y - x$ alarak, $0 < a < y - x$ eşitsizliklerini sağlayan bir $a \in A$ elemanı bulabiliriz. Şimdi a, $2a$, $3a$, $4a$, ... gibi a'nın katlarına bakalım. Bir zaman sonra bunlardan biri x'i aşmak zorunda[1]. x'i aşmayan en son sayı na olsun. Demek ki $na \le x < (n+1)a$. Şimdi, $(n+1)a = na + a \le x + a < x + (y - x) = y$. Demek ki x ile y arasında $(n+1)a \in A$ sayısını bulduk (bknz. Önsav 1). □

1 Eğer $0 < a$ ise ve $0 < x$ ise, o zaman $x < na$ eşitsizliğini sağlayan bir n doğal sayısı vardır. Buna **Arşimet özelliği** denir.

Önsav 5. *Eğer $x \notin \mathbb{Q}$ ise, $\mathbb{Z} + x\mathbb{Z}$ yoğundur.*

Kanıt: $A = \mathbb{Z} + x\mathbb{Z}$ olsun. $n \in \mathbb{Z}$ için, $nx - [nx]$ sayılarına bakalım. Burada $[nx]$, nx sayısının tam kısmıdır. Demek ki $0 \le nx - [nx] < 1$. Eğer $n \ne m$ ise, $nx - [nx] \ne mx - [mx]$ eşitsizliğini iddia edip kanıtlıyoruz: Eğer $nx - [nx] = mx - [mx]$ ise $[nx] \ne [mx]$ ve $x = \dfrac{m-n}{[nx]-[mx]} \in \mathbb{Q}$, bir çelişki. Ayrıca $nx - [nx] \in A$. Demek ki $A \cap [0, 1]$ kümesi sonsuz.

Şimdi $\varepsilon > 0$ olsun. ε'un $[0, 1]$ aralığındaki tam katlarına, yani

$$0 < \varepsilon < 2\varepsilon < 3\varepsilon < 4\varepsilon < \ldots < [1/\varepsilon]\varepsilon \le 1$$

sayılarına bakalım. Bu $n\varepsilon$'lardan sonlu sayıda olduğundan ve $A \cap [0, 1]$ sonsuz olduğundan, öyle bir $n \in 0, 1, 2, \ldots, [1/\varepsilon]$ vardır ki, $n\varepsilon$ ve $(n+1)\varepsilon$ arasında A'dan sonsuz sayıda eleman vardır. Bunlardan ikisini alalım: a_1 ve a_2. Şimdi $|a_1 - a_2| \in A$ ve $0 < |a_1 - a_2| < \varepsilon$. Demek ki 0, A'nın bir yoğunlaşma noktası. Önsav 4'e göre A yoğundur. □

Sonuç 6. *Eğer $x \notin \mathbb{Q}$ ise, $\mathbb{Z} + x\mathbb{Z}$ grubu $z\mathbb{Z}$ biçiminde yazılamaz.*

Kanıt: Yukarda gördüğümüz üzere $\mathbb{Z} + x\mathbb{Z}$ yoğun bir küme, ama $z\mathbb{Z}$ kümeleri yoğun değiller. □

Sonuç 7. *Eğer $y \ne 0$ ve $x/y \notin \mathbb{Q}$ ise, $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$, $z\mathbb{Z}$ biçiminde yazılamaz.* □

Sonuç 3 ve 7'den şu teorem çıkar.

Teorem 8. *$y \ne 0$ olsun. $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$ kümesinin belli bir $z \in \mathbb{Z}$ için $z\mathbb{Z}$'ye eşit olması için gerek ve yeter koşul x/y'nin kesirli sayı olmasıdır.* □

Teorem. *Bir grubun yoğun olmaması için gerek ve yeter koşul bir $z \in \mathbb{R}$ için $z\mathbb{Z}$'ye eşit olmasıdır.*

Kanıt: $z\mathbb{Z}$'nin yoğun olamayacağı bariz.

A yoğun olmayan bir grup olsun. Eğer $A = \{0\}$ ise $z = 0$ işimizi görür. Bundan böyle $A \ne \{0\}$ varsayımı altında çalışalım. Önsav 4'e göre, A'da 0'dan büyük en küçük bir eleman vardır (neden?) Bu elemana z diyelim. $z \in A$ olduğundan, $z\mathbb{Z} \subseteq A$. Şimdi $A \subseteq z\mathbb{Z}$ ilişkisini kanıtlayalım. $a \in A$ olsun. $a = 0$ ise, elbette $a = z \times 0 \in z\mathbb{Z}$. Önce a'nın pozitif olduğunu varsayalım. z, $2z$, $3z$, $4z$ elemanlarından biri a'yı geçer. a'yı geçmeyen en büyük nz'yi alalım. Demek ki $nz \le a < (n+1)z$. Dolayısıyla, $0 < (n+1)z - a \le z$. Ama $(n+1)z - a \in A$, çünkü $(n+1)z \in z\mathbb{Z} \subseteq A$, dolayısıyla, z'den küçükeşit olduğundan, bu sayı z'ye eşit olmalı. Demek ki $(n+1)z - a = z$ ve $a = nz \in z\mathbb{Z}$. Eğer $a < 0$ ise, $-a \in z\mathbb{Z}$ ve $a \in z\mathbb{Z}$. ■