

Geometri Köşesi

Alpaslan Parlakçı*
aparlakci@bilgi.edu.tr



Pappus ve Desargues Teoremleri

Geçen sayımızda birbiriyle oldukça ilintili olan Menalaus ve Ceva teoremlerini incelemiştik. Bu iki teorem, bütün temel geometri kitaplarında birlikte anlatılır. Aşağıda buna benzer bir ikili olan Pappus ve Desargues teoremlerinin kanıtlarını vereceğiz.

Öklid gibi büyük bir matematikçi olan Pappus M.Ö 300'lü yıllarda İskenderiye'de yaşadı. Girard Desargues (1591-1661) ise aslında bir mimardı ve dolayısıyla – her iyi mimar gibi – geometriyle de çok ilgiliydi. Geometriye eski Yunan tarzının dışında bir yaklaşım getirdi. Desargues'a göre Öklid geometrisiyle açıklanamayan gerçek geometrik/fiziksel durumlar vardı. Örneğin iki paralel doğru sonsuz uzakta bir yerde kesişiyorlarmış gibi gelir bize. Bu düşünceden hareketle, Desargues modern geometrinin doğuşunu hazırlayan “izdüşümsel” geometrinin temel

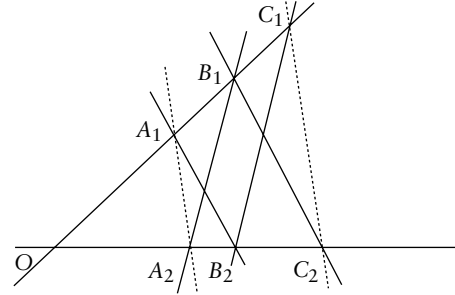


Girard Desargues

lerini atmış oldu. İzdüşümsel geometride tüm doğrular kesişirler, yani paralel doğru yoktur.

Pappus Teoremi. A_1, B_1, C_1 ve A_2, B_2, C_2 noktaları doğrusalsa ve $A_1B_2 \parallel B_1C_2$ ve $B_1A_2 \parallel C_1B_2$ ise $A_1A_2 \parallel C_1C_2$ dir.

Kanıt. İki doğrunun bir O noktasında kesiştiğini varsayalım. A_1B_2 doğrusu B_1C_2 doğrusuna paralel olduğundan, A_1B_2O üçgeni B_1C_2O üçgeniyle benzerdir. O halde $B_2O/C_2O = A_1O/B_1O$ oransal eşitliği yazılabilir. Aynı şekilde, C_1B_2O üçgeni de B_1A_2O üçgeniyle benzerdir. Demek ki, $B_2O/A_2O = C_1O/B_1O$ eşitliği sağlanır. Bu iki eşitlik taraf tarafa oranlanırsa $A_2O/C_2O = A_1O/C_1O$



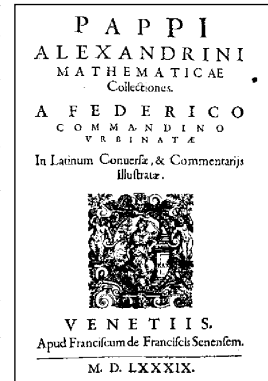
oransal eşitliği elde edilir. A_1OA_2 açısı C_1OC_2 açısıyla aynı olduğundan A_1OA_2 üçgeniyle C_1OC_2 üçgeni benzer olurlar. Böylelikle de A_1A_2O açısı C_1C_2O açısına eşit olur ki, bu da C_1C_2 doğrusunun A_1A_2 doğrusuna paralel olduğunu gösterir.

$A_1B_1C_1$ ve $A_2B_2C_2$ doğrularının paralel olduğu durumun kanıtını okura bırakıyoruz. □

Teoremin en genel halini aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür:

Genelleştirilmiş Pappus Teoremi. A_1, B_1, C_1 ve A_2, B_2, C_2 noktaları doğrusalsa, $O_1 = A_1B_2 \cap B_1C_2$, $O_2 = B_1A_2 \cap C_1B_2$, $O_3 = A_1A_2 \cap C_1C_2$ olarak tanımlanan noktalar da doğrusaldır.

Desargues Teoremi. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, A_1, B_1 ve C_1 noktaları doğrusal olmayan üç nokta olsun. $A_2, B_2,$ ve C_2 noktaları ise A_1A_2, B_1B_2 ve C_1C_2 doğruları birbirlerine paralel ve A_1B_1 doğrusu A_2B_2 doğrusuna paralel ve A_1C_1 doğrusu A_2C_2 doğrusuna paralel olacak şekilde seçilen noktalar olsun. Bu durumda B_1C_1 doğrusu B_2C_2 doğrusuna paralel olur.



* İstanbul Bilgi Üniversitesi Bilgisayar Bölümü öğretim üyesi.

