Kapak Konusu: Çizgeler

Sonsuz Ramsey Teoremi

Ali Nesin* / *anesin@bilgi.edu.tr*

Sonsuz sayıda insanın bulunduğu bir toplulukta, öyle sonsuz sayıda insan seçebilir miyiz ki, bu seçtiğimiz insanların ya hepsi birbirini tanısın ya da hiçbiri kimseyi tanımasın?

Yanıt, okurun da tahmin ettiğini sandığım gibi, "evet, seçebiliriz"dir. Bu, Ramsey adlı bir matematikçinin kanıtladığı çok ünlü bir teoremin sonucudur.

Önce soruyu matematikselleştirelim. Her insanı bir nokta olarak gösterelim. Eğer iki insan birbirini tanıyorsa, bu iki insana eşdüşen noktaları kırmızı bir kenarla birleştirelim. Eğer iki insan birbirini tanımıyorsa, bu iki insana eşdüşen noktaları mavi bir kenarla birleştirelim. Her ikisi kırmızı ya da mavi bir kenarla birleştirilmiş sonsuz noktalı bir çizge elde ettik. Bu noktalar arasından, hep aynı renkle (ya hep kırmızıyla ya hep maviyle) birleştirilmiş sonsuz sayıda nokta bulacağız.

Kanıtımızı iki aşamada gerçekleştireceğiz. Birinci aşamada öyle sonsuz tane

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots$$

noktası bulacağız ki, her a_i kendisinden sonra gelen

$$a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, \ldots$$

noktalarıyla aynı renk kenarla (ya hep kırmızı, ya hep mavi kenarla) bağlanmış olacak.

Birinci noktayı seçmek kolay. Herhangi bir a_0 noktası işi görür. $a_1, a_2, a_3,\ldots$ noktalarını biraz daha dikkatli seçeceğiz. Bu $a_1, a_2, a_3,\ldots$ noktalarını öyle seçmeliyiz ki, a_0 noktası bu noktalarla hep aynı renk kenarla bağlanmış olsun.

a_0 noktası, öbür noktalarla ya kırmızı ya da mavi bir kenarla bağlanmıştır. Sonsuz tane nokta olduğundan ve yalnızca iki renk kenar olduğundan, a_0'ın aynı renk kenarla bağlandığı sonsuz tane nokta vardır. a_0'ın hep aynı renk kenarla bağlandığı sonsuz bir nokta kümesi alalım. Bu kümeye A_0 diyelim. Demek ki,

a_0, A_0'ın noktalarıyla hep aynı renk kenarla bağlanmıştır.

Bunu aklımızda tutalım. $a_1, a_2, a_3,\ldots$ noktalarını bu A_0 kümesinde seçeceğiz. Böylece a_0 noktası istediğimiz koşulu sağlamış olacak.

Şimdi A_0'dan herhangi bir a_1 noktası alalım. a_1 noktası, A_0'ın öbür noktalarına ya kırmızı ya da mavi bir renkle bağlanmıştır. A_0'da sonsuz tane nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan, A_0 kümesinde, a_1'in aynı renk kenarla bağlandığı sonsuz tane nokta vardır. Yani, ya

$$\{a \in A_0 : aa_1 \text{ kırmızı}\}$$

kümesi, ya da

$$\{a \in A_0 : aa_1 \text{ mavi}\}$$

kümesi sonsuzdur. Bu kümelerden sonsuz olanına A_1 adını verelim. Demek ki, $A_1 \subseteq A_0$ ve

a_1, A_1'in noktalarıyla hep aynı renk kenarla bağlanmıştır.

$a_2, a_3, a_4,\ldots$ noktalarını A_1'de seçeceğiz ve böylece yukardaki koşul a_1 için sağlanmış olacak.

Şimdi A_1'den herhangi bir a_2 noktası alalım. a_2 noktası A_1'in öbür noktalarıyla ya kırmızı ya da mavi bir kenarla bağlanmıştır. A_1'de sonsuz nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan, A_1'de, a_1'in hep aynı renkle bağlandığı sonsuz tane nokta vardır. Bir başka deyişle, ya

$$\{a \in A_1 : aa_2 \text{ kırmızı}\}$$

kümesi, ya da

$$\{a \in A_1 : aa_2 \text{ mavi}\}$$

kümesi sonsuzdur. Bu kümelerden sonsuz olanına A_2 adını verelim. Demek ki,

a_2, A_2'nin noktalarıyla hep aynı renk kenarla bağlanmıştır.

$a_3, a_4, a_5, \ldots$ noktalarını A_2'de (dolayısıyla A_1 ve A_0 kümelerinde de) seçeceğiz ve böylece yukardaki koşul a_2 için (ve a_0 ve a_1 için de) sağlanmış olacak.

Şimdi A_2'den herhangi bir a_3 noktası alalım. Yukarda yaptıklarımızı a_3 ve A_2 için yapalım. A_2'nin içinde, öyle bir sonsuz A_3 kümesi bulalım ki, a_3, A_3'ün her noktasıyla hep aynı renk kenarla bağlanmış olsun.

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü. Yazarın Matematik ve Oyun adlı kitabındaki bir yazısından derlenmiştir.

Bunu böylece sonsuza değin sürdürebiliriz. Demek ki, öyle

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, ...$$

noktaları bulabiliriz ki, her nokta kendisinden sonra gelen noktalarla aynı renk kenarla bağlanmış olsun.

Kanıtın birinci aşamasını tamamladık. Sıra ikinci aşamaya geldi.

Dikkatle seçtiğimiz bu $a_0, a_1, a_2, a_3,...$ noktalarının herbirine bir renk vereceğiz. Eğer bir nokta kendisinden sonra gelen noktalarla hep kırmızı kenarla bağlanmışsa, o noktaya **kırmızı nokta** diyeceğiz. Yoksa, o noktaya **mavi nokta** diyeceğiz. Örneğin, eğer a_0 noktası, kendisinden sonra gelen $a_1, a_2, a_3,...$ noktalarıyla hep kırmızı bir kenarla bağlanmışsa, a_0 noktasına kırmızı nokta diyeceğiz. Eğer a_5 noktası kendisinden sonra gelen $a_6, a_7, a_8,...$ noktalarıyla hep mavi kenarla bağlanmışsa, a_5 noktasına mavi nokta diyeceğiz.

Sonsuz sayıda nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan,

$$a_0, a_1, a_2, a_3, ...$$

noktalarından sonsuz tanesi aynı renk noktadır. Bir başka deyişle, ya kırmızı noktalar kümesi ya da mavi noktalar kümesi sonsuzdur. Matematiksel olarak söyleyecek olursak, ya

$$\{a_i : a_i \text{ kırmızı bir nokta}\}$$

ya da

$$\{a_i : a_i \text{ mavi bir nokta}\}$$

kümesi sonsuzdur. İki küme birden de sonsuz olabilir, ama en azından birinin sonsuz olduğunu biliyoruz. İki kümeden sonsuz olanını alalım. Öbür noktaları atalım. Noktalarımızı yeniden adlandırarak, her noktanın aynı renk olduğunu varsayabiliriz, diyelim hepsi kırmızı. Demek ki,

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4,...$$

noktalarının herbirinin kırmızı olduğunu varsayıyoruz. Bu kümeden iki nokta alalım: a_i ve a_j. Diyelim i, j'den daha küçük. a_i, kırmızı bir nokta olduğundan, a_i noktası a_j noktasıyla kırmızı bir kenarla bağlanmıştır. Demek ki yukardaki sonsuz nokta birbirleriyle aynı renk kenarla (kırmızıyla) bağlanmıştır. Ramsey'in teoremi kanıtlanmış oldu.

Elbette iki renkle yaptığımızı üç renkle, dört renkle, genel olarak sonlu sayıda renkle de yapabilirdik. Ramsey'in asıl teoremi de zaten genel olarak n renk içindir:

Sonsuz Ramsey Teoremi: *n renk ve sonsuz sayıda noktamız olsun. Her iki nokta, bu n renkten birine boyanmış bir kenarla birleştirilmiş olsun. O zaman, her iki noktası aynı renk kenarla birleştirilmiş sonsuz sayıda nokta vardır.* ♦