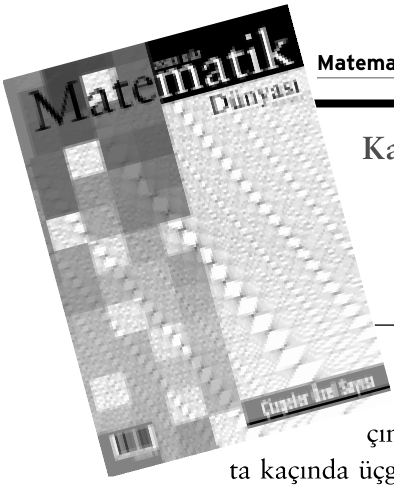


Kapak Konusu: Çizgeler

Sonlu Rastgele Çizgeler

I. Giriş. Bu yazıda n noktalı çizgelerin kaçta kaçında bir kenar vardır, kaçta kaçında üçgen vardır, kaçta kaçı tekparçadır, kaçta kaçı düzlemseldir. Bu soruları yanıtladıktan sonra n'yi sonsuza götürüp, bu olasılıkların limitini bulacağız.

Göreceğimiz üzere yanıtlar çoğu zaman "yüzde yüz" ya da "yüzde sıfır" çıkacak.

Daha sonra şu soruya yanıt arayacağız: n noktalı bir çizgenin belli bir özelliği "büyük bir olasılıkla" sağlaması için kenar sayısı (en az ya da en fazla) kaç olmalıdır? Göreceğimiz üzere, belli bir kenar sayısının üstüne çıkıldığında (ya da altına inildiğinde) özelliğin sağlanma olasılığı yüzde yüze yakın oluyor, tam tersine o kenar sayısının altına inildiğinde (ya da üstüne çıkıldığında) özelliğin sağlanma olasılığı yüzde sıfıra yakın oluyor. Yani birçok özellik için belli bir "eşik" kenar sayısının olduğunu göreceğiz.

Elbette olasılıktan sözedebilmek için her şeyden önce olasılık uzayımızı tanımlamamız gerekecek.

II. En Basit Olasılık Uzayı. Çizgelerin herhangi bir özelliğini alalım. Örneğin tekparça olma, ya da içinde bir üçgen barındırma, ya da herhangi iki nokta arasındaki mesafenin en fazla 2 olma özelliğini... Özelliğimize P diyelim.

Noktaları adlandırılmış n noktalı tam $2^{n(n-1)/2}$ tane çizge vardır. Kolaylık olması açısından, bundan böyle $n(n-1)/2$ sayısını N ile gösterelim. N, n kenarlı bir çizgenin olabilecek en fazla kenar sayısıdır, yani K_n tamçizgesinin kenar sayısıdır. n noktalı çizge sayısı da 2^N'dir.

Bu 2^N tane n noktalı çizgenin bir kısmı P özelliğini sağlar, bir kısmı sağlamaz. P özelliğini sağlayan n noktalı çizge sayısına $a_n(\mathrm{P})$ diyelim.

Demek ki P özelliğini sağlayan n noktalı çizgelerin tüm n noktalı çizgelere oranı

$$a_n(\mathrm{P})/2^N$$

dir. Dolayısıyla n noktalı çizgeleri bir torbaya doldursak, torbayı iyice karıştırsak, o kadar iyi karıştırsak ki herhangi bir çizgeyi seçme olasılığımız bir diğer çizgeyi seçme olasılığımızdan değişik olmasa, yani tüm çizgeleri seçme olasılığımız eşit olsa, o zaman o torbadan rastgele seçilmiş bir çizgenin P özelliğini sağlama olasılığı $a_n(\mathrm{P})/2^N$'dir. Bunu

$$\mathrm{Olas}_n(\mathrm{P}) = a_n(\mathrm{P})/2^N$$

olarak yazalım. Sol taraftaki $\mathrm{Olas}_n(\mathrm{P})$, n noktalı bir çizgenin P özelliği olma olasılığıdır. Bu sayının $a_n(\mathrm{P})/2^N$ olduğunu gördük.

$\mathrm{Olas}_n(\mathrm{P})$ sayısını bulmak, yani $a_n(\mathrm{P})$'yi bulmak çoğu zaman imkânsıza yakındır. Dolayısıyla $\mathrm{Olas}_n(\mathrm{P})$ sayılarıyla değil, bu sayıların n sonsuza gittiğindeki limitiyle ilgilenilir. Bu limite $\mathrm{Olas}_\infty(\mathrm{P})$ ya da daha basit olsun diye Olas(P) diyelim:

$$\mathrm{Olas}(\mathrm{P}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Olas}_n(\mathrm{P}).$$

Örnek 1. Bazen Olas(P) diye bir sayı olmayabilir. Örneğin P, "çift sayıda nokta var" özelliğiyse, $\mathrm{Olas}_n(\mathrm{P})$ sayıları, n tekse 0'a, n çiftse 1'e eşittirler ve 0 ve 1'lerden oluşan bu dizinin limiti yoktur.

Örnek 2. Eğer P, "en az 2^{N-1} tane kenar var" özelliğiyse, yani P, "kenar sayısı olası kenar sayısının yarısından fazladır" özelliğiyse, o zaman $\mathrm{Olas}_n(\mathrm{P}) = 1/2$'dir elbette. Dolayısıyla $\mathrm{Olas}(\mathrm{P}) = 1/2$.

Örnek 3. "Büyük Çizgeler Küçük Çizgeleri Yutar!" yazısında (sayfa 30), eğer P, bir üçgen içerme özelliğiyse, Olas(P)'nin 1 olduğunu kanıtlamıştık. Hatta, daha da genel olarak, verilmiş bir G çizgesi için, eğer P, "G'yi içerme" özelliğiyse, Olas(P)'nin 1 olduğunu kanıtlamıştık.

Örnek 4. Tam Tur Olasılığı yazısında, n noktalı ve n kenarlı bir çizgenin bir tam tur (yani bir Hamilton turu yani C_n) olma olasılığının, n sonsuza giderken 0'a yakınsadığını bulmuştuk. Bundan da şu çıkar: Eğer P, "çizge tekparçadır ve her noktasının derecesi 2'dir (yani çizge bir Hamilton turudur)" özelliğiyse ve Q, "çizgenin nokta sayısı kenar sayısına eşittir" özelliğiyse, o zaman $a_n(\mathrm{P})/a_n(\mathrm{Q})$ sayılarının limiti 0'dır.

Örnek 5. Eğer P, tekparça olma özelliğiyse, Olas(P)'nin 1 olduğu bilinir. Ne yazık ki bu ilginç sonucu kanıtlamak için yeterince yerimiz yok.

İlginç bir biçimde, birçok P özelliği için Olas(P) sayısı ya 0 ya da 1'dir.

Yukardaki olasılık uzayında, her çizgeyi seçme olasılığımız $1/2^N$ idi. Bir sonraki paragrafta bu olasılık uzayını biraz genelleştireceğiz.

III. Daha Genel Bir Olasılık Uzayı. Yukarda, n adlandırılmış noktalı çizgeleri bir torbaya koyup içlerinden birini rastgele seçtik. Dolayısıyla her bir çizgeyi seçme olasılığımız $1/2^N$ idi. Rastgele çizgeyi yukardaki gibi değil de, başka türlü seçmeye çalışalım. Herhangi iki değişik nokta arasına bir kenar koyup koymamak konusunda karar vermek için yazı tura atalım. Diyelim yazı gelirse kenar koyacağız, tura gelirse koymayacağız. Ancak paramızın hileli olma olasılığını da göz önünde bulundurarak yazı gelme olasılığına (1/2 yerine) p diyelim. Tura gelme olasılığı da o zaman $1 - p$'dir elbet. Şimdi herhangi bir adlandırılmış n noktalı çizge alalım. Diyelim bu çizgede k kenar var. Dolayısıyla geri kalan $N - k$ nokta çifti arasında kenar yok. Bu çizgeyi elde etmemiz için kenarlar tarafından birleştirilmiş k nokta çifti için yazı, kenarlar tarafından birleştirilmemiş $N - k$ nokta çifti için tura atmamız gerekiyor. Demek ki bu çizgeyi elde etme olasılığımız

$$p^k(1-p)^{N-k}$$

dır. Eğer $p = 1/2$ ise, yukarda tanımladığımız olasılık uzayını bulduğumuzdan, bu olasılık uzayı, yukarda söz ettiğimiz olasılık uzayından daha geneldir. Ama $p \neq 1/2$ ise olasılıklar değişir. Örneğin, p arttıkça, K_n tamçizgesini elde etme olasılığımız artar.

Çizgelerin herhangi bir P özelliğini alalım. Her $k = 0, 1, \ldots, N$ için, $a_{n,k}(\text{P})$, P özelliğini sağlayan n noktalı ve k kenarlı çizge sayısı olsun. $a_n(\text{P})$ de n noktalı bir çizgenin P özelliğini sağlayan çizge sayısı olsun. Elbette,

$$\textstyle\sum_k a_{n,k}(\text{P}) = a_n(\text{P})$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi n noktalı bir çizgenin, bu olasılık uzayında P özelliğini sağlama olasılığını hesaplayabiliriz:

$$\text{Olas}_n(\text{P}, p) = \textstyle\sum_k a_{n,k}(\text{P})p^k(1-p)^{N-k}.$$

(Toplam, k = 0'dan N'ye kadar gidiyor.) Soldaki $\text{Olas}_n(\text{P}, p)$, "herbir kenarın varolma olasılığı p olduğunda, n noktalı bir çizgenin P özelliğini sağlama olasılığı" diye okunmalıdır. Eğer $p = 1/2$ alırsak bir önceki bölümdeki olasılığı buluruz:

$$\text{Olas}_n(\text{P}, 1/2) = \textstyle\sum_k a_{n,k}(\text{P})/2^N = (1/2^N) \sum_k a_{n,k}(\text{P}) = a_n(\text{P})/2^N.$$

IV. Daha Daha Genel Bir Olasılık Uzayı. Yukarda, herhangi bir kenarı seçme olasılığı p idi. Açık açık söylemedik ama p'yi n'den bağımsız aldık. Oysa öyle olmayabilir.

Örneğin, nokta sayısı (dolayısıyla kenar sayısı da) arttıkça bir kenarı seçme olasılığımız azalabilir.

Örnek: $p = 1/N$ olabilir. O zaman k kenarlı herhangi bir çizgeyi elde etme olasılığımız

$$(1/N)^k(1-1/N)^{N-k}$$

dir. Bu olasılık uzayında K_n tamçizgesini elde etme olasılığı (bir önceki formülde $k = N$ alacağız)

$$1/N^N$$

dir, bunların da limiti 0'dır. Öte yandan, hiç kenarı olmayan çizgeyi elde etme olasılığı (yukarda k = 0 alacağız bu kez)

$$(1-1/N)^N$$

dır. n sonsuza giderken (dolayısıyla N de sonsuza giderken) bu sayıların limiti $1/e$'dir. Buradaki e, Neper sabiti diye de bilinen logaritmik sabittir: e = 2,718281828459045235360287471352 7…

Genel olarak, eğer $p = p(n)$ ise, n noktalı k kenarlı sabit bir çizgeyi seçme olasılığımız

$$(1/\,p(n))^k(1-1/\,p(n))^{N-k}$$

dir. Aynen bir önceki bölümde olduğu gibi, n noktalı bir çizgenin P özelliğini sağlama olasılığını hesaplayabiliriz:

$$\text{Olas}_n(\text{P}, p(n)) = \textstyle\sum_k a_{n,k}(\text{P})\, p(n)^k\, (1-p(n))^{N-k}.$$

Soldaki $\text{Olas}_n(\text{P}, p(n))$, "herbir kenarın varolma olasılığı $p(n)$ olduğunda, n noktalı bir çizgenin P özelliğini sağlaması olasılığı" diye okunmalıdır.

Eğer $p(n)$ sabit bir sayıysa bir önceki olasılığı buluruz.

V. Örnek 1. Tamçizge Olma Olasılığı

P, çizgenin tamçizge olma özelliği olsun.

n noktalı bir çizgenin tamçizge olması için gerek ve yeter koşul çizgede tüm N kenarın olmasıdır. Dolayısıyla, eğer $k \neq N$ ise $a_{n,\,k} = 0$ ve $a_{n,\,N}$ = 1. Yukardaki formülü uygulayacak olursak,

$$\text{Olas}_n(\text{P}, p(n)) = \textstyle\sum_k a_{n,k}(\text{P})p(n)^k(1-p(n))^{N-k} = p(n)^N = p(n)^{n(n-1)/2}$$

buluruz. Demek ki n noktalı bir çizgenin bir tamçizge olma olasılığı $p(n)^{n(n-1)/2}$ dir.

Eğer tüm $p(n)$'ler birbirine eşit olsa,yani $p(n)$

n	$\approx(1 - 1/n^2)^{n(n-1)/2}$
2	0,75
3	0,702331962
4	0,678934157
5	0,664832636
6	0,655364864
7	0,648557229
8	0,643422306
9	0,639409158
10	0,636185486
11	0,633538723
12	0,631326464
13	0,629449677
14	0,627837339
15	0,626437176

bir sabit olsa, bu olasılık $p(n) = 1$ için yüzde yüz, $p(n) < 1$ için yüzde sıfırdır. Ama $p(n)$'ler sabit olmak zorunda değil, n'ye göre değişebilirler, o zaman sonsuzdaki limitleri de değişir.

Yukardaki formülde

$$p(n) = 1 - 1/n^2$$

alalım ve n sonsuza giderken limitini hesaplayalım. n büyüdükçe bu olasılık büyüdüğünden, kenar sayısı n büyüdükçe artar ve sonsuzda belki de 0 olmayan bir olasılıkla tamçizgeyi elde ederiz.

Önce $\text{Olas}_n(\text{P}, p(n))$'yi bulalım.

$$\text{Olas}_n(\text{P}, p(n)) = (1 - 1/n^2)^{n(n-1)/2}$$

Şimdi n'yi sonsuza götüreceğiz. Yukarıdaki çizelgede birkaç değer hesapladık.

Sonsuzdaki değer aşağıda:

$$\begin{aligned}
&\text{Olas}_n(\text{P}, p(n))\\
&= (1-1/n^2)^{n(n-1)/2}\\
&= ((1-1/n^2)^{n^2})^{1/2}((1-1/n^2)^n)^{-1/2} =\\
&= ((1-1/n^2)^{n^2})^{1/2}((1-1/n)^n(1+1/n)^n)^{-1/2} =\\
&= ((1-1/n^2)^{n^2})^{1/2}((1-1/n)^n)^{-1/2}((1+1/n)^n)^{-1/2}\\
&\to (e^{-1})^{1/2}(e^{-1})^{-1/2}e^{-1/2} = e^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Demek ki, bu dağılımla (yani $p(n) = 1-1/n^2$ kenar olasılığıyla) n çok büyük olduğunda, n noktalı rastgele bir çizgenin bir tamçizge olma olasılığı

$1/\sqrt{e} =$ 0,4507993471211281579323823385...

sayısına yakın, nerdeyse yüzde elli...

Buraya kadar yeterince ilginçti, ama işler daha da ilginçleşecek. Şimdi $p(n) << 1-1/n^2$ olsun. Yani $(1-1/n^2)/p(n)$, n sonsuza giderken sonsuza gitsin, edebi bir deyişle, $p(n)$, $1-1/n^2$'den bayağı küçük olsun. O zaman, kolay bir hesapla kanıtlanabileceği üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \text{Olas}_n(\text{P}, p(n)) = 0.$$

Öte yandan, eğer $p(n) >> 1-1/n^2$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} \text{Olas}_n(\text{P}, p(n)) = 1.$$

Görüldüğü gibi, olasılık $1-1/n^2$'nin üstünde 1, altında 0 ve $1-1/n^2$'de $1/\sqrt{e}$. Gene edebi bir deyişle $p(n) = 1-1/n^2$ fonksiyonu, "tamçizge olma" özelliğinin **eşik fonksiyonu**.

Eğer $p(n)$ bir özelliğin eşik fonksiyonuysa, herhangi bir $c > 0$ sabiti için, $cp(n)$ de aynı özelliğin bir eşik fonksiyonudur. Ama aynı özelliğin başka eşik fonksiyonları da olabilir.

VI. Örnek 2. En Az Bir Kenar Olma Olasılığı

Kenar olma olasılığı arttıkça, çizgede en az bir kenar olma olasılığı da artar. Ama nokta sayısı (yani n) arttıkça kenar olma olasılığı azalsa da, nokta sayısı arttıkça deneme sayımız da ($n(n-1)/2$) arttığından, bir zaman sonra bir kenar belirme olasılığı artış kaydedebilir. Bu örnekte, çizgede en az bir kenar olma olasılığının p'ye göre nasıl değiştiğini bulacağız.

"En az bir kenarı olma" özelliğine P diyelim. "Hiç kenarı olmama" özelliğine de Q.

Çizgenin hiç kenarı olmama olasılığını, yani $\text{Olas}_n(\text{Q}, p(n))$ sayılarını hesaplayalım önce:

$$\begin{aligned}\text{Olas}_n(\text{Q}, p(n)) &= (1- p(n))^N\\ &= (1- p(n))^{n(n-1)/2}.\end{aligned}$$

Dolayısıyla çizgede en az bir kenar olma olasılığı,

$$\text{Olas}_n(\text{P}, p(n)) = 1 - (1- p(n))^{n(n-1)/2}$$

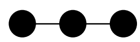
dir. Bu sefer $p(n) = 1/n^2$ eşik fonksiyonudur. Nitekim, yukarda görüldüğü üzere,

$$\begin{aligned}\text{Olas}(\text{P}, p(n)) &= \lim_{n\to\infty} \text{Olas}_n(\text{P}, p(n)) =\\ &= 1 - e^{-1/2} = 0{,}54920065287887...\end{aligned}$$

Eğer $p(n) << 1/n^2$ ise, o zaman en az bir kenar olma olasılığı 0'dır. Eğer $p(n) >> 1/n^2$ ise, o zaman en az bir kenar olma olasılığı 1'dir.

VII. Başka Sonuçlar

Yandaki şeklin belirmesi için (yani en az bir noktanın derecesinin en az 2 olması için) $p(n)$'nin en az $1/p^{3/2}$ olması gerekiyor. Yani eğer $p(n) >> 1/p^{3/2}$ ise, n büyük olduğunda, yandaki çizgenin rastgele seçilmiş n noktalı bir çizgenin altçizgesi olma olasılığı 1'e yakın. Eğer $p(n) << 1/p^{3/2}$ ise böyle bir çizgenin belirme olasılığı çok düşüktür. Yani $1/p^{3/2}$ yandaki şeklin belirmesi için bir eşik fonksiyonu.



k+1 noktalı tüm ağaçların altçizge olarak belirmesi için $p(n)$ en az $n^{-1-1/k}$ olmalı.

$p(n) = 1/n$ olduğunda üçgenler ortaya çıkar, daha önce değil. Sadece üçgenler değil, her uzunlukta döngüler de ortaya çıkar. Ve aynı zamanda bu olasılıkla birlikte çizgeler düzlemsel olmaktan çıkarlar.

$p(n) = \frac{\ln n}{n}$'den itibaren çizgeler tekparça olmaya başlarlar. Bundan da $p(n) = 1/2$ olduğunda, çizgelerin genelde tekparça oldukları çıkar.

$p(n) = n^{-2/3}$'ten itibaren K_4 belirir. Daha da genel olarak, $p(n) = n^{-2/(k-1)}$'ten itibaren K_k belirir.

$p(n) = n^{-1/2} \ln^{1/2} n$ ile birlikte çizgelerin **çapı** 2 olmaya başlar, yani o olasılıkla birlikte her iki nokta üçüncü bir noktaya bağlanır. Dolayısıyla $p(n) = 1/2$ olduğunda, çizgeler çaplarını 2 yapmaya çalışırlar. ♦