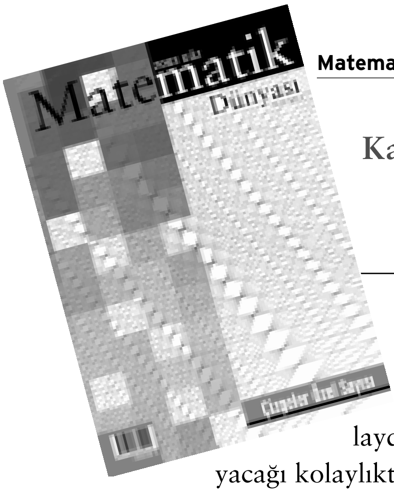


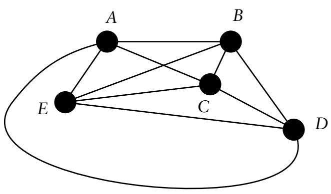
Kapak Konusu: Çizgeler

Euler Formülü

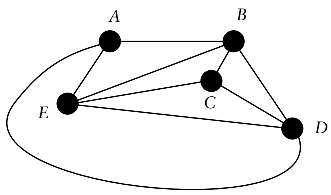
Euler'in kanıtladığı çok şaşırtıcı bir eşitlik vardır. Kanıtı çok da kolaydır. Bir çocuğun bile anlayacağı kolaylıkta...

Kanıtı bu kadar kolay olan bir eşitliğin "Euler formülü" diye bilinmesinin nedeni, eşitliğin ilginçliğindendir elbette. Kolay kolay akla gelmeyecek bir eşitlik... Akla gelse, kanıtlaması kolay...

Kenarlarının sadece çizgenin noktalarında kesişecek biçimde düzleme çizilebilen çizgelere **düzlemsel** denir. Örneğin, yandaki çizge düzlemsel değildir, çünkü bu çizge düzleme nasıl çizilirse çizilsin en az iki kenar çizgisi mutlaka kesişmek zorunda, sözgelimi resimde AC ve BE kenar çizgileri kesişmiş.

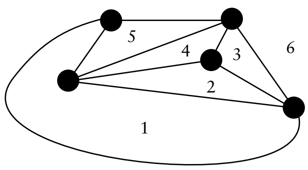


Öte yandan, soldaki çizge düzlemseldir, yani bir düzleme kenarları kesişmeyecek biçimde çizilebilir, nitekim çizilmiş de.



Tamçizgeler (bknz. sayfa 11) arasında sadece K_1, K_2, K_3, K_4 düzlemseldir, K_5'ten itibaren tamçizgeler düzlemsel değildir.

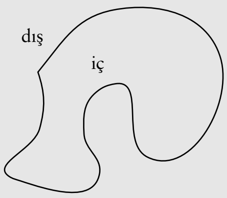
Düzlemsel bir çizge alalım. Bu çizgeyi bir biçimde düzleme çizelim. Çizge, düzlemi bölgelere ayırır. Örneğin bir üstteki çizge düzlemi altı parçaya ayırır (çizgenin dışında kalan parçayı da sayıyoruz).



Teorem (Euler Formülü). *Tekparça ve düzlemsel bir çizgenin bölge sayısı b, kenar sayısı k, nokta sayısı n ise,* $b - k + n = 2$ *eşitliği geçerlidir.*

Kanıt: Kanıtımız b üzerine tümevarımla olacak. Eğer $b = 1$ ise, o zaman çizgede hiç döngü yok demektir, yani çizge bir ağaçtır. Ağaç ve Orman adlı yazımızda $k = n - 1$ eşitliğini kanıtlamıştık (Teorem 1, sayfa 19). Demek ki bu durumda, $b - k + n = 1 - (n - 1) + n = 2$ ve eşitlik doğru.

Düzleme çizilen sürekli, kapalı (yani başladığı yerde biten) ve kendi üstünde kesişmeyen bir eğri, düzlemi, düzlemin **içi** ve **dışı** olmak üzere iki parçaya ayırır. 1887'ye kadar bu teorem matematikçilere o kadar basit görünüyordu ki kimse kanıtlamak gereksinimini duymamıştı. Bu gereksinimi ilk duyan Fransız matematikçi Camille Jordan'dır. Teoremin adı da **Jordan Eğri Teoremi**'dir. Ne var ki Jordan'ın kanıtı yanlıştı. Bugün bilinen kanıtların hiçbiri kolay değildir.



Sözünü ettiğimiz Euler Formülü, b sayısından sözetmekle, bir anlamda Jordan Eğri Teoremi'ni kabul eder.

Şimdi $b > 1$ olsun. Çizgeye G adını verelim. Bu AB, çizgenin (bir bölge oluşturan) bir döngüsünün bir kenarı olsun. AB kenarını kaldıralım. Geri kalan çizgeye G_1 adını verelim. G_1 çizgesinin bölge, kenar ve nokta sayıları sırasıyla b_1, k_1 ve n_1 olsun. AB kenarı bir döngünün parçası olduğundan, AB, G'nin iki bölgesine ortaktır. Dolayısıyla AB'yi kaldırdığımızda G'nin iki bölgesi tek bir bölge haline gelir. Yani $b_1 = b - 1$ eşitliği geçerlidir. Ve elbette $k_1 = k - 1$ ve $n_1 = n$ eşitlikleri de geçerlidir. Ayrıca G_1 hâlâ daha tekparça bir çizge (neden?) Dolayısıyla tümevarım varsayımına göre Euler formülü G_1 çizgesi için doğru, yani $b_1 - k_1 + n_1 = 2$. Demek ki, $b - k + n = (b_1 + 1) - (k_1 + 1) + n = b_1 - k_1 + n_1 = 2$. □

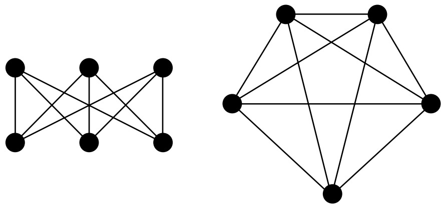
Sonuç. $K_{3,3}$ *ve* K_5 *çizgeleri düzlemsel değildir.*

Kanıt: Önce K_5 çizgesini ele alalım. K_5 çizgesinde $n = 5$ ve $k = 10$. Dolayısıyla, düzlemsel olsaydı, $b - k + n = 2$ formülünden $b = 7$ çıkardı. Şimdi

$$\{(B, X) : X \text{ kenar, } B \text{ bölge ve } X,\ B \text{ bölgesinin bir kenarı}\}$$

kümesini iki değişik biçimde sayalım.

Her X kenarı iki bölgeye dahil olduğundan bu



$K_{3,3}$ ve K_5 çizgeleri

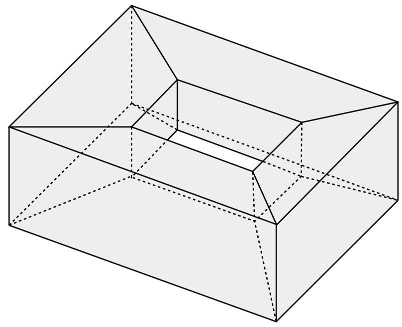
kümede $2k$, yani 20 tane eleman var. Her bölge bir üçgenden oluşmak zorunda olduğundan, bu kümede ayrıca $3b$, yani 21 tane eleman var. $21 \neq 20$ olduğundan K_5 düzlemsel değildir.

Şimdi $K_{3,3}$ çizgesini ele alalım. Bu çizgede $n = 6$ ve $k = 9$. Dolayısıyla, düzlemsel olsaydı, $b - k + n = 2$ formülünden $b = 5$ çıkardı. Şimdi

$$\{(B, X) : X \text{ kenar, } B \text{ bölge ve } X, B \text{ bölgesinin bir kenarı}\}$$

kümesini iki değişik biçimde sayalım.

Her X kenarı iki bölgeye dahil olduğundan bu kümede $2k$, yani 18 tane eleman var. Her bölge en az dört köşeden oluşmak zorunda olduğundan, bu kümede ayrıca en az $4b$, yani 20 tane eleman var, yani $18 > 20$, çelişki. Demek ki $K_{3,3}$ düzlemsel değildir. ♦



Bir kübün ortasına, aynı yönde küçük bir küp yerleştirelim. Büyük kübün köşe noktalarını küçük kübe eş düşen noktalarla birleştirelim. Küçük kübü büyük kübün ortasındaki bir delik gibi görelim. Bir çizge elde ederiz. Nokta sayısı $= n = 16$, kenar sayısı $= k = 32$. Euler Formülü'nün doğru olması için bölge sayısı 18 olmalı. Öte yandan, bakış açısına göre, bölge sayısı ya 16'dır ya da en az 20. Euler Formülü, ifade edildiği biçimde üç boyutlu uzayda yanlıştır. Ancak, küp, piramit gibi "deliksiz" bir çokyüzlü için formül doğrudur. Bu konuda [GS] ilginç bir yazıdır, öneririz. ♦

El Sıkışma Teoremi

Bir toplulukta bazıları birbirleriyle el sıkışmışlar bazıları el sıkışmamışlar. Tek sayıda kişiyle el sıkışmış insan sayısını tahmin edebilir miyiz? Bu sayıyı tam olarak bilemeyiz elbet, nasıl bilelim ki... Ancak, tek sayıda kişiyle el sıkışmış kişi sayısı mutlaka çift olmalıdır, bunu kanıtlayabiliriz, kanıtlayacağız da... Örneğin, tek sayıda kişiyle el sıkışmış 5 kişi olamaz, illa çift kişi olmalı.

İnsanları bir çizgenin noktaları olarak görelim. Eğer iki kişi el sıkışmışsa, o kişileri simgeleyen noktalar arasına bir kenar çizelim. Böylece bir çizge elde etmiş oluruz. Bir kişinin el sıkıştığı kişi sayısı, o kişiyi simgeleyen noktaya değen kenar sayısıdır, yani o noktanın "derecesi"dir. Demek ki, tek sayıda kişiyle el sıkışmış insan sayısının çift olduğunu kanıtlamak için aşağıdaki teoremi kanıtlamalıyız:

El Sıkışma Teoremi. *Sonlu bir çizgede derecesi tek olan nokta sayısı çifttir.*

Bu teoremi kanıtlamak için önce aşağıdaki önsavı kanıtlayacağız. Eğer A bir çizgenin bir noktasıysa, $d(A)$, o noktanın derecesini simgelesin.

Önsav. *Sonlu bir $G = (V,E)$ çizgesinde*

$$\sum_{A\in V} d(A) = 2|E|$$

eşitliği geçerlidir.

Önsav'ın Kanıtı: Çizgemizin kenar sayısı $|E|$. Her kenarın iki uç noktası var. Dolayısıyla her kenarın, noktaların derecelerinin toplamına 2 katkısı oluyor. Dolayısıyla noktaların derecelerinin toplamı kenar sayısının iki katıdır. □

El Sıkışma Teoremi'nin Kanıtı: V_0, derecesi çift olan, V_1, derecesi tek olan noktalar kümesi olsun. Yukardaki önsavda kanıtlanan eşitlikten,

$$\sum_{A\in V_0} d(A) + \sum_{A\in V_1} d(A) = 2|E|$$

eşitliği çıkar. Demek ki,

$$\sum_{A\in V_0} d(A) + \sum_{A\in V_1} d(A)$$

çift bir sayı. Ama sol taraftaki toplamdaki $d(A)$ sayılarının herbiri çift, dolayısıyla toplam da çift. Demek ki, sağdaki

$$\sum_{A\in V_1} d(A)$$

sayısı da çift olmalı. Ama buradaki $d(A)$'ların herbiri tek bir sayı. Bu $d(A)$'ların toplamının çift olması için çift sayıda $d(A)$ toplamalıyız, yani V_1 çift bir sayı olmalı. Teoremimiz kanıtlanmıştır. ♦