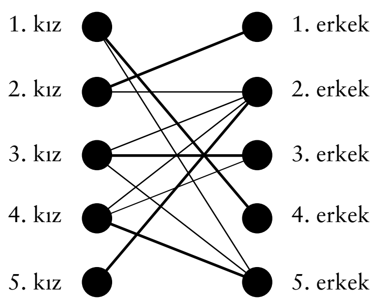
Kapak Konusu: Çizgeler

Çöpçatanlık Problemi

Sonlu sayıda bekâr kız ve erkekten oluşan bir toplulukta bazı kız ve erkek çiftleri birbirlerini beğeniyorlar ve herbiri beğendiklerinden biriyle evlenmeye hazır. Herkesi beğendiği biriyle evlendirebilir miyiz?

Sözgelimi, 5 kız ve 5 erkekten oluşan bir topluluk olsun ve bu 10 kişi noktalarla, birbirini beğenen kız ve erkek çiftlerini de kenarlar aracılığıyla aşağıdaki gibi bir çizge olarak gösterelim.



(1,4), (2,1), (3,3), (4,5), (5,2) evlilikleri bu çöpçatanlık probleminin birkaç çözümünden biridir. Parantez içindeki birinci sayılar kızları, ikinci sayılar erkekleri simgeliyor.

Eğer bir çizgenin noktaları, aynı parçanın herhangi iki noktası arasında kenar olmayacak şekilde iki parçaya ayrılabiliyorsa, o çizgeye **"iki kümeli çizge"** denir.

Problemi kızlar ve erkekler olmak üzere iki kümeli bir çizge olarak gösterip her dişi noktayı bir ve bir tek erkek noktayla eşleştirdik. Topluluğun tüm üyeleri evlendi. Böyle bir eşlemeye **mükemmel eşleme**[1] denir. Mükemmel eşlemelerde her kız tek ve bir tek erkeğe, her erkek de tek ve bir tek kıza eş düşer.

Eğer erkeklerin sayısı kızlardan daha fazlaysa (ya da tam tersiyse), bir mükemmel eşleme mümkün değildir elbet. Mükemmel eşleme mümkün olmasa da, bu durumda, her kızı bir erkekle evlendirecek bir eşleme bulabiliriz (bulamayabiliriz de). Her kızı evlendiren bir eşlemeye **kızları kayıran eşleme** diyelim. Elbette eğer kızları kayıran bir eşleme varsa ve kız sayısı erkek sayısına eşitse, kızları kayıran bu eşleme aslında erkekleri de kayırır, yani herkes halinden memnundur.

Amacımız, kızları kayıran bir eşlemenin (yani her kızı evlendiren bir eşlemenin) hangi koşullarda olduğunu bulmak. Matematikte buna **çöpçatanlık problemi**[2] denir.

Bundan böyle her erkeğin her kızı beğendiğini varsayalım, yani her erkek herhangi bir kızla evlenmeye razı olsun. Bu varsayım sadece dilimizi sadeleştirmemizi sağlayacak, bu varsayımla herhangi bir genellik kaybetmeyeceğiz.

Eğer erkekten çok kız varsa, her kızı mutlu etmek çokeşliliğin yasaklandığı topluluklarda mümkün olmaz. Çokeşliliğin yasaklandığını varsayacağız. Dolayısıyla kızların sayısı erkeklerin sayısından fazla olmamalı, yani yeterince erkek olmalı. Ama bu da yetmez. Örneğin her kız aynı erkeği beğenirse ve kızların gözü başka erkek görmezse ve birden fazla kız varsa çöpçatanlık kesinlikle başarıya ulaşamaz. Dolayısıyla beğenilen yeterince erkek olmalı.

Çöpçatanlık Teoremi (Philip Hall, 1935). *m kızdan oluşan bir toplulukta çöpçatanlık probleminin kızları mutlu eden bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul, her $k = 1, ..., n$ için k kız içeren herhangi kız topluluğunun en az k değişik erkeği beğenmesidir.*

Bu problemin çöpçatanlık dışında da uygulama alanlarını bulmak kolaydır. Örneğin bir işyerinde bitirilmeyi bekleyen işler ve işleri yapabilecek özellikte kişiler olsun, ayrıca her işin tek bir kişi tarafından yapılması istensin. İşlerle bu işleri yapabilecek kişileri eşleme problemine çözüm için gerek ve yeter koşulları yukarıdaki teorem verir.

Kızlar kümesine K, erkekler kümesine E diyelim. Eğer L bir kız topluluğuysa, bu topluluktaki kızların en az birinin beğendiği erkekler kümesi $B(L)$ olsun. O zaman yukardaki teorem çizgeler kuramı dilinde şu şekli alır:

1 İngilizcesi "perfect matching".

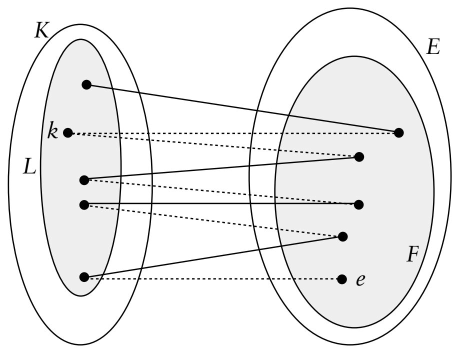
2 İngilizcesi "mariage problem".

Çöpçatanlık Teoremi. $G(K, E)$ *iki kümeli bir çizge olsun. K'yi kayıran bir eşlemenin var olması için gerek ve yeter koşul, her* $L \subseteq K$ *altkümesi için* $|B(L)| \geq |L|$ *eşitsizliğidir.*

Kanıt: Koşulun gerekli olduğu besbelli. (Yoksa L'deki kızlarla eşleşecek yeterince erkek olmazdı.) Koşulun yeterli olduğunu kanıtlayalım. Her $L \subseteq K$ için $|B(L)| \geq |L|$ eşitsizliğini varsayalım. K'yi kayıran bir eşleme bulacağız.

M, bulabileceğimiz en fazla evliliği içeren bir eşleme olsun. Çizge diline çevirirsek, M uç noktaları kesişmeyen kenarlardan (eşlemelerden, evliliklerden) oluşuyor ve bu özelliğe sahip daha fazla sayıda kenar içeren bir küme yok. M'nin kenarlarının K'nin her noktasına değdiğini göstereceğiz (yani M evliliklerinin her kızı evlendirdiğini göstereceğiz.) $k \in K$, bu eşlemelerde görülmeyen bir nokta olsun (yani k, M evliliklerinde kocasız kalan bir kız.)

M eşlemesine göre evde kalan k adlı kızımızdan başlayarak, ardışık iki kenarından birinin M'de olduğu en uzun yollara bakalım. Bu yollardan hiçbiri bir erkek noktada bitemez, çünkü öyle bir yol e erkek noktasında bitseydi, o zaman – yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi – yolumuzda bulunan M'deki eşlemeleri atıp (düz kenarlar), onların yerine M'de bulunmayan eşlemeleri (kesik kenarları) alır ve böylece M'den bir fazla eşlemesi olan bir eşleme kümesi bulurduk. Demek ki bu yolların herbiri gene bir kızda bitiyor.



k'den başlayan ve ardışık kenarları *M*'de olan bir yol. Düz çizgiler *M*'de. Kesik çizgiler *M*'de değil.

Bu tür (k'den başlayan ve her iki ardışık kenarından birinin M'de olduğu) yolların geçtiği kız noktalar kümesine L, erkek noktalar kümesine F diyelim. F'nin her noktası M eşlemesiyle L'deki tek bir noktayla eşlenmiştir, ayrıca bu tür yollar bir erkekte sona eremeyeceğinden, $B(L) = F$ eşitliği geçerlidir. Demek ki $|F| \leq |L|$. Öte yandan, k, L kümesinde olan ve M'de görülmeyen bir nokta olduğundan, $|L| \geq |F| + 1$. Bu durumda, $|B(L)| = |F| < |F| + 1 \leq |L|$ eşitsizliğini elde ederiz, yani $|B(L)| < |L|$, bir çelişki. Demek ki öyle bir k noktası yoktur. □

Bir Sonuç. $G(K, E)$ *iki kümeli bir çizge olsun. Mükemmel bir eşlemenin var olması için gerek ve yeter koşul* $|K| = |L|$ *eşitliği ve her* $L \subseteq K$ *altkümesi için* $|B(L)| \geq |L|$ *eşitsizliğidir.*

Kanıt: Yukardaki teoreme göre her kız bir erkekle eşleştirilebilir. Ama kız sayısı erkek sayısına eşit, demek ki her erkek de eşleştirilmiştir, yani bu eşleme mükemmel bir eşlemedir. □

Bir Başka Sonuç. *G iki kümeli bir çizge olsun. G'nin her noktasının derecesi aynı olsun ama bu derece 0 olmasın. O zaman G'nin mükemmel bir eşlemesi vardır.*

Kanıt: Yukardaki sonucu uygulayacağız. İki ayrık kümeye K ve E diyelim. Derece k olsun.

G'nin her noktasının derecesi k olduğu için $k|K| = |E(G)| = k|E|$, yani $|K| = |E|$'dir (çünkü $k \neq 0$).

$L \subseteq K$ olsun. L_1, L'deki noktalara değen kenarlar kümesi, $B(L)_1$ ise $B(L)$'deki noktalara değen kenarlar kümesi olsun. Tanım gereği $L_1 \subseteq B(L)_1$. Bu durumda $k|B(L)| = |B(L)_1| \geq |L_1| = k|L|$, yani $|B(L)| \geq |L|$. Dolayısıyla – yukardaki sonuca göre – G çizgesinde mükemmel bir eşleme vardır. □

Algoritma. Çöpçatanlığın hangi koşullarda başarıya ulaşacağını göstermek hatırı sayılır bir başarı, ancak koşulların gerçekleşip gerçekleşmediğini kısa zamanda anlayıp koşullar gerçekleştiğinde kızları kayıran bir eşlemeyi çabuk bulursak daha iyi olur, ki kızlarla oğlanlar karta kaçmasınlar.

Yazımızı, çözümü varsa çöpçatanlık problemine bir çözüm veren, yoksa çözümsüzlüğü gösteren bir algoritmayla bitirelim.

$K = \{1, 2, ..., n\}$ kızlar kümesi olsun. M_0, M_1, M_2, ..., M_n kenarlar kümesi dizisini tanımlayacağız. Her M_i kısmi bir eşleme olacak. En son tanımlanan M_n aradığımız mükemmel eşleme olacak.

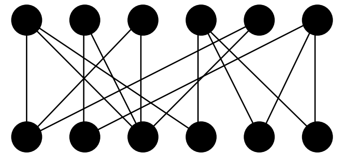
$M_0 = \varnothing$ olsun. Her $1 \leq i \leq n$ için, M_i'yi sırayla tanımlayalım:

1. T_i, i noktasından başlayan dallardan oluşan ve ardışık her iki kenarından birinin M_{i-1}'de olduğu daha fazla büyütülemeyecek herhangi bir ağaç olsun.

2. Eğer yukarda tanımlanan T_i ağacı, *i*'de başlayan, daha uzatılamayacak ve M_{i-1}'de görülmeyen bir noktada sona eren bir D dalı barındırıyorsa, $M_i = (M_{i-1} \setminus E(D)) \cup (E(D) \setminus M_{i-1})$ olsun; i yerine $i + 1$ alarak birinci adımdan algoritmaya devam edelim.

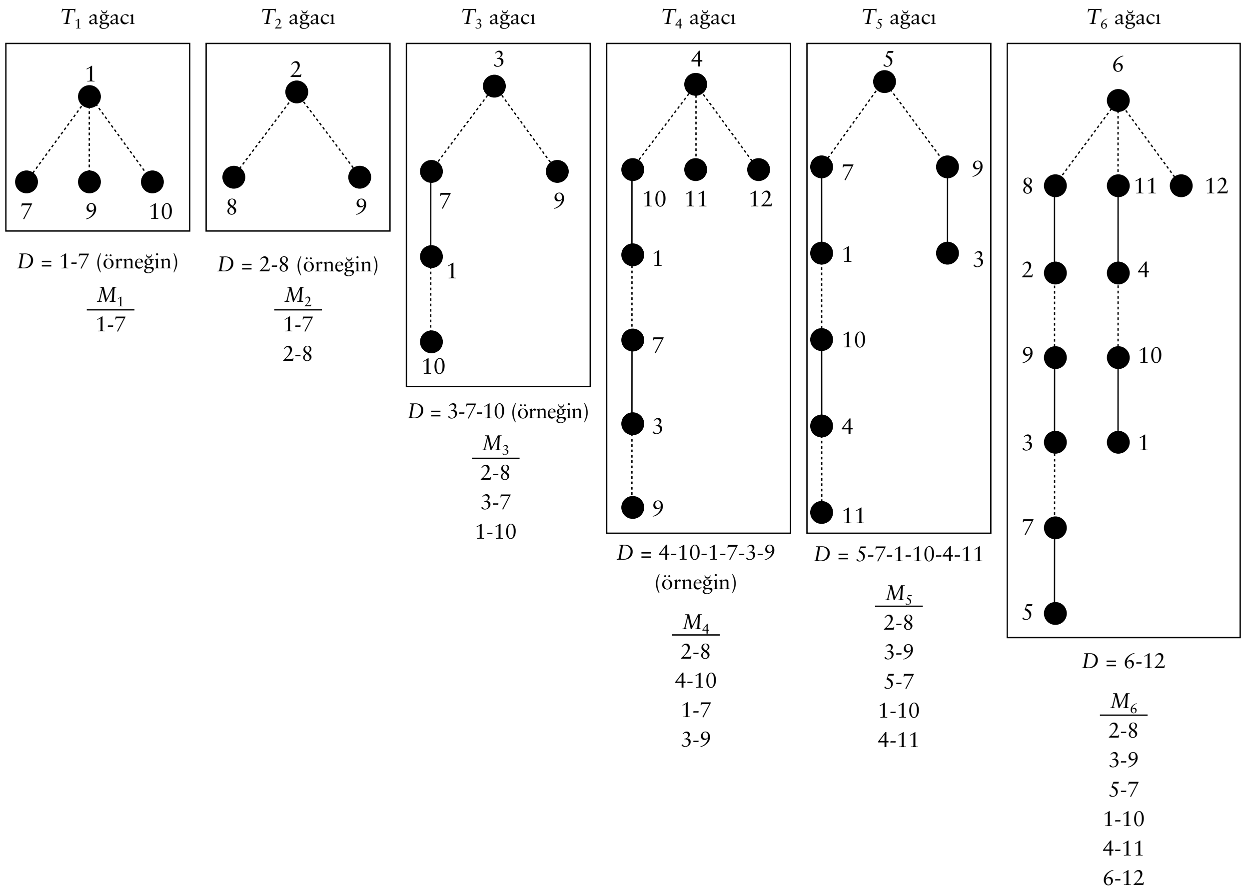
3. Eğer T_i'nin her i noktasında başlayan en uzun dalının son noktaları M_{i-1}'de görülüyorsa o zaman mükemmel eşleme koşulları gerçekleşmemiş demektir. Nitekim $L = V(T_i) \cap K$ ise, $|B(L)| < |L|$'dir ve algoritma sona erer.

Örnek: 1, 2, 3, 4, 5, 6 kızları, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ise erkekleri simgelesin. Bu 12 kız ve erkeğin hangilerinin yuva kurmaya razı olduklarını aşağıdaki çizgedeki bağıntılarla gösterelim.



Algoritmamızı uyguladığımızda aşağıdaki T ağaçlarını, D dallarını ve M eşlemelerini elde ederiz.

$M_0 = \emptyset$, bunu biliyoruz. Şimdi $i = 1$ olsun ve algoritmaya devam edelim.



Örneğimizdeki çizgede (M_6 tarafından verilen) mükemmel bir eşleme bulduk, yani üçüncü adıma hiç geçmedik. ♦