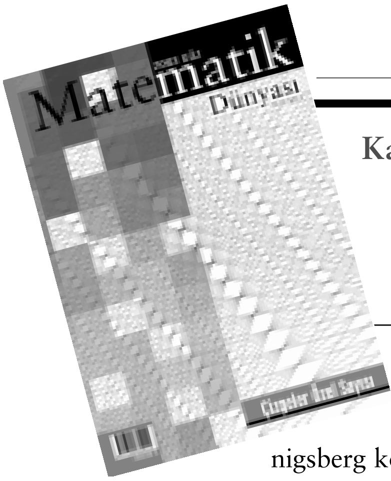
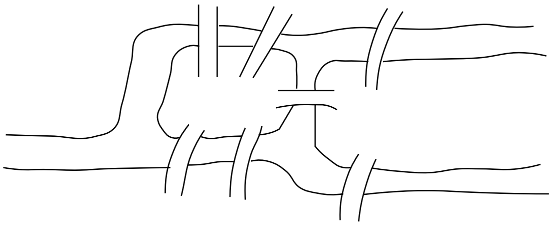


Kapak Konusu: Çizgeler

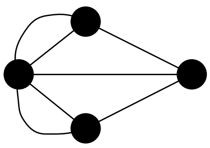
Euler Turu

Çizge kuramının bilinen en eski sorusu “Königsberg köprü problemi”dir.



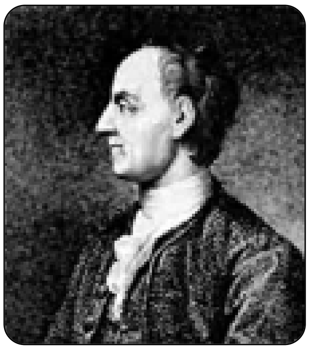
Yukarda, Königsberg’deki Pregel nehrinin ve karalar arasında geçişi sağlayan yedi köprünün planını görüyorsunuz. Bu yedi köprünün herbirinden sadece bir kez geçecek bir yolculuk mümkün müdür?

Euler 1736’da bunun mümkün olmadığını göstermiştir: Kara parçalarını (yani nehrin iki yakasını ve iki adacığı) dört noktayla, yedi köprüyü de bu noktalar arasına koyacağımız kenarlarla gösterirsek



çizgesini[1] elde ederiz. Her köprüden tam bir kez geçmek demek, yukardaki çizgenin her kenarından tam bir kez geçecek bir yolculuk bulmak demektir. Bir önceki yazıda da gördüğümüz üzere bu mümkün değildir, çünkü derecesi[2] tek olan nokta sayısı 0 ya da 2 değildir.

Her kenardan tam bir kez geçen ve başladığı noktaya geri dönen yolculuklara **Euler turu** denir. Euler turu olan çizgelerin tekparça ve her noktasının çift dereceli olması gerektiğini biliyoruz, bir önceki yazıda görmüştük bunu. Şimdi bu iki koşulun çizgede Euler turu olması için yeterli olduğunu kanıtlayacağız.



Teorem [Euler, 1736]. *Her noktasının derecesinin çift olduğu sonlu ve tekparça bir çizgede Euler turu vardır.*

Önce bir önsav:

Önsav. *Her noktasının derecesinin en az iki olduğu bir çizgede, başladığı noktaya dönen ve hiçbir kenardan iki kez geçmeyen bir yolculuk vardır.*

Kanıt: Dikkat edilirse önsavımız yolculuğun her kenardan ya da her noktadan geçeceğini söylemiyor.

A_0 çizgenin herhangi bir noktası olsun. A_0 noktasından başlayan bir yolculuğa çıkacağız.

Önce A_0’dan A_0’a bağlı herhangi bir A_1 noktasına gidelim.

Yolculuğumuza devam ediyoruz: A_1, A_0’a bağlı; ama derecesi en az iki olduğundan A_1’e bir başka yol daha değmeli. Diyelim A_1, A_2 noktasına A_0A_1 yolundan değişik bir yolla bağlı, diyelim A_1A_2. Şimdi A_0A_1 diye başladığımız yolculuğa A_1’den A_2’ye giderek devam edelim.

Yolculuğumuza devam ediyoruz: A_2, A_1’e bağlı, ama derecesi en az iki olduğundan A_2’ye bir başka yol daha değmeli, diyelim A_2A_3. Şimdi $A_0A_1A_2$ diye başladığımız yolculuğumuza A_2’den A_3’e giderek devam edelim.

Yolculuğumuza devam ediyoruz: A_3, A_2’ye bağlı; ama derecesi en az iki olduğundan A_3’e bir başka yol daha değmeli, diyelim A_3A_4. Yolculuğumuza A_3’ten A_4’e giderek devam edelim.

Bu yolculuğu böylece sürdürelim.

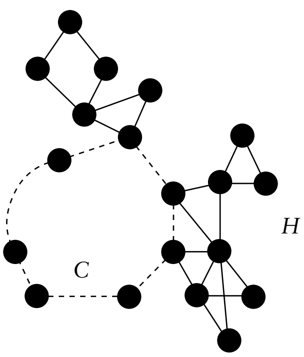
1 Bu yazıda iki nokta arasında birden fazla kenarın olduğu çizgeleri de kabul edeceğiz. Hatta çizgelerimizde, başka bir noktadan geçmeden, bir noktadan gene aynı noktaya giden **tekdöngüler** de, yani AA gibi kenarlar da olabilir.

2 Bir önceki yazıda tanımlandığı üzere, A noktasının derecesi, A noktasına değen kenar sayısıdır. Eğer AA bir kenarsa, bu kenar A’nın derecesine 2 katar. Eğer $A \neq B$ ise ve çizgede AB kenarı varsa, bu kenar A’ya 1 derece katar.

$A_0A_1A_2A_3A_4$... diye bir yolculuktayız, ve her i için $A_iA_{i+1} \neq A_{i+1}A_{i+2}$.

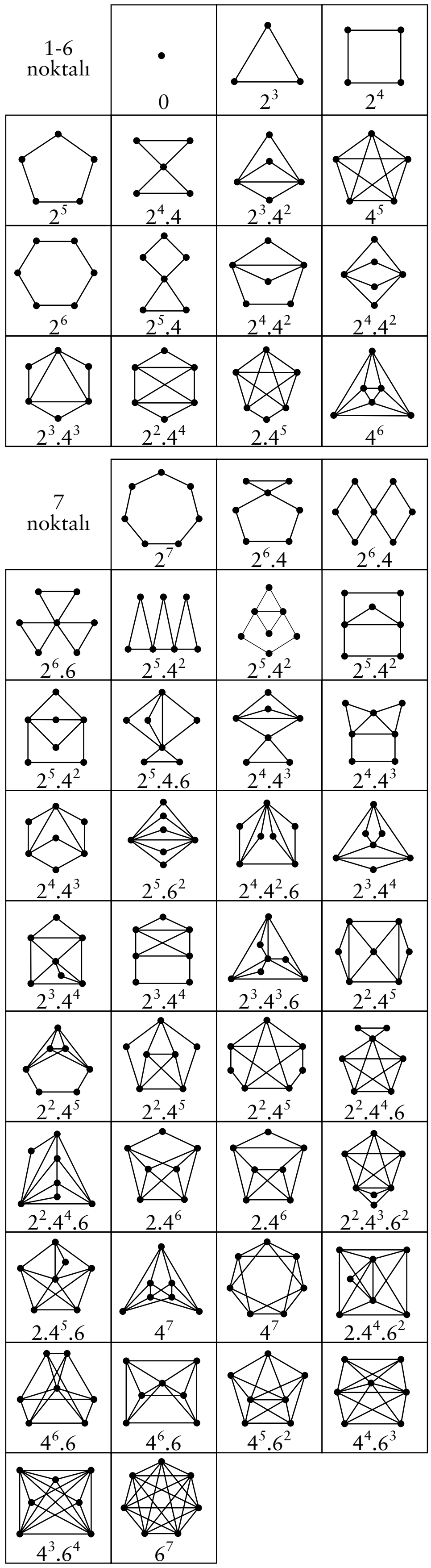
Çizge sonlu olduğundan, bir zaman sonra aynı noktaya ikinci kez rastlamalıyız. Örneğin $A_4 = A_7$ olabilir, hatta $A_8 = A_9$ olabilir. Daha önce geçtiğimiz bir noktaya **ilk** rastladığımızda duralım. Bu (birbirine eşit olan) ilk noktayı ve arasındaki yolu alalım. Örneğin ilk nokta eşitliği A_4 ve A_7'de rastlanıyorsa, $A_4A_5A_6A_7$ yolunu ele alalım. Bu yol başladığı noktaya (örneğimizde A_4) geri döner (örneğimizde $A_7 = A_4$ noktasına) ve iki kez aynı kenardan geçmez. □

Euler Teoremi'nin Kanıtı: Çizgemize G diyelim. Kanıtımız G'nin kenar sayısına göre tümevarımla olacak. Çizgemiz tekparça olduğundan, derecesi 0 olan nokta yoktur. Dolayısıyla her noktanın derecesi en az ikidir (ve çifttir). Bir önceki önsava göre çizgede aynı kenardan iki kez geçmeyen ve başladığı noktaya geri dönen bir yolculuk vardır. C böyle bir yolculuk olsun. Eğer C, G'deki tüm kenarları içeriyorsa C bir Euler turudur ve işimiz bitmiştir. İçermiyorsa G'den C'deki kenarları çıkardığımızda, G'den daha az kenara sahip, muhtemelen birkaç parça ve yine her noktasının derecesi çift olan bir H çizgesi elde ederiz.



Tümevarım varsayımına göre, H çizgesinin her parçasında bir Euler turu vardır. Ayrıca H çizgesinin her parçasının C ile ortak en az bir noktası olmalıdır, yoksa G tekparça olamazdı. G'de aradığımız Euler turunu şöyle elde edelim: C'deki kenarları izleyelim ve H çizgesinin bir noktasına gelince o noktanın bulunduğu parçanın Euler turunu izleyip aynı noktaya geri dönelim ve C'de ilerlemeye devam edelim. C'deki başladığımız noktaya dönünce G'nin Euler turunu tamamlamış oluruz. □

1-7 Noktalı Euler Çizgeleri



Bir önceki sayfada her kenarının derecesinin çift olduğu $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ noktalı tekparça yalın çizgeleri bulacaksınız.

Bunlara **Euler çizgeleri** denir.

Her kenardan bir kez geçerek ve el kaldırmadan tek hamlede çizilen çizgeleri saptayalım şimdi. Bir önceki yazıda gördüğümüz üzere bu tür çizgeler tekparça olmalı ve derecesi tek olan 0 ya da 2 noktası olmalı. Şimdi göreceğimiz üzere, bu koşullar, çizgenin her kenarından bir kez geçerek tek hamlede çizilebilmesi için yeterlidir.

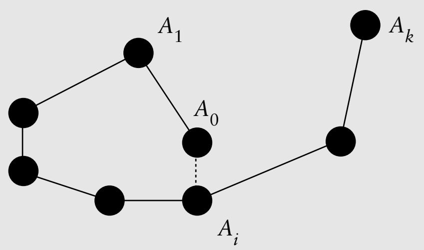
Teorem. *Tek dereceli nokta sayısının* 0 *ya da* 2 *olduğu tekparça çizgeler tek hamlede (el kaldırmadan) her kenardan sadece bir kez geçilerek çizilebilir.*

Kanıt: Çizgemize G diyelim. Eğer tek dereceli nokta sayısı 0 ise, yani her noktanın derecesi çift ise, bu, Euler'in yukarda kanıtladığımız teoremi. Şimdi çizgede tek dereceli sadece iki nokta olduğunu varsayalım. Bu noktalara A ve B diyelim. A ve B arasına yeni bir kenar ekleyelim (aralarında kenar varsa da ekleyelim, anımsarsanız çizge tanımımız bu yazıda daha geniş, iki nokta arasında birden çok kenar olduğu çizgeleri de kabul ediyoruz.) Elde ettiğimiz çizgeye H adını verelim. Elbette H'nin her noktasının derecesi çifttir. Ayrıca H tekparçadır, çünkü G'nin kendisi tekparça, bir kenar eklemekle tekparçalık bozulmaz, tam tersine çizge daha da tekparça olur! Demek ki, yukarda kanıtladığımız Euler'in teoremine göre H'nin bir Euler turu vardır. Bu Euler turuna istediğimiz kenardan başlayabileceğimize dikkatinizi çekeriz. Tura, G'ye eklediğimiz AB kenarıyla başlayalım. Tur AB diye başlayıp gene A'da bitiyor. Bu Euler turundan en baştaki AB kenarını atarsak, G'de her kenardan sadece bir kez geçen (B'de başlayıp A'da biten) bir yolculuk bulmuş oluruz. Bu teoremimiz de kanıtlanmıştır.♦

Ayrık Döngülerin Bileşimi Olan Çizgeler

Bir **döngü**, başladığı noktaya geri dönen ve aynı noktadan iki kez geçmeyen bir yolculuktur.

Teorem. *Bir çizgenin kenarlarının, ortak kenarı olmayan döngülerin kenarlarının bileşimi olması için yeter ve gerek koşul, her noktanın derecesinin çift olmasıdır.*



Kanıt: Döngülerin noktalarının derecesi 2 olduğundan, koşul gereklidir. Şimdi koşulun yeterli olduğunu kanıtlayalım. Önce her noktasının derecesi çift olan bir çizgede bir döngü bulalım.

Aynı noktadan iki kez geçmeyen en uzun yolu alalım. Bu yol $A_0A_1...A_k$ olsun (A_i'ler yolun noktaları, geçildikleri sırayla dizilmişler, hiçbiri bir diğerine eşit değil.) A_0'ın derecesi çift olduğundan A_0'a bağlı A_1'den başka bir nokta daha olmalı. Bu noktaya B diyelim. Şimdi $BA_0A_1...A_k$ yoluna bakalım. Bu yol, aynı noktadan geçmeyen en uzun yoldan daha uzun, dolayısıyla aynı noktadan iki kez geçmeli ve ikinci kez geçilen nokta elbette B noktası olmalı. Diyelim $B = A_i$, $i > 1$. Şimdi $BA_0A_1...A_i$ bir döngüdür.

Çizgede bir döngü bulduk. Bu döngünün kenarlarını çizgeden çıkarırsak daha az kenarlı ve her noktasının derecesi gene çift olan bir çizge buluruz. Yukarda yaptığımızı bu çizgeyle yapalım. İkinci bir döngü buluruz. Bu döngüyü de çıkaralım çizgeden, ve böylece kenar kalmayana dek devam edelim. Çizgemizin kenarları, bu teker teker attığımız döngülerin kenarlarının bileşimidir.♦