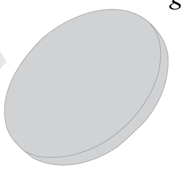
Yazı Tura Sorusu

Mete Lick

Geçen sayının 55inci sayfasında bir yazı tura sorusu sorulmuştu:

Soru: *Yazı tura atıyorsunuz. Yazı gelirse 1 puan alıyorsunuz, tura gelirse 2 puan. Ve puanlarınızı topluyorsunuz. Toplamın bir zaman sonra n olma olasılığı kaçtır? n sonsuza gittiğinde, bu olasılıklar belli bir sayıya yakınsar mı? Yakınsarsa kaça yakınsar? Bir başka deyişle, n çok çok büyük olduğunda, toplamın bir zaman sonra n olma olasılığını aşağı yukarı bulabilir misiniz?*



Yanıt. Birçok kişinin sezgilerine güvenerek olasılıkların limitinin 1 olacağını tahmin edeceğini tahmin ediyoruz. Aynen bizim yaptığımız gibi... Çünkü toplaya toplaya nasıl olsa sonsuza varılacaktır... Dolayısıyla toplamın sonsuza ulaşma olasılığı 1'dir, yani olasılıkların limiti de 1 olmalıdır... Yanlış! Kalbimizden geçen "$\lim_{n\to\infty} p(n) = p(\infty)$" denkleminin ne matematiksel bir anlamı vardır, ne de anlam verilebilse bile bir kanıtı. Yanıt 1 değil 2/3'tür malesef.

$p(n)$, toplamın n olma olasılığı olsun. Elbette $p(1) = 1/2$ ve $p(2) = 1/2 + 1/4 = 3/4$ (toplamın 2 olması için ya ilk atışta tura atmalıyız ya da ilk iki atış üstüste yazı gelmeli.)

Toplam her zaman iki ardışık sayıdan biri olmak zorundadır; örneğin, toplam, 5 ve 6'dan (en azından) birine eşit olur en fazla 6 atıştan sonra. Dolayısıyla toplam kesinlikle $n-2$ ya da $n-1$ olacaktır. Eğer toplam $n - 2$ olursa – ki $p(n-2)$ olasılıkla toplam $n - 2$ olur – o zaman 3/4 olasılıkla n'ye ulaşırız (bir yazı ya da peşpeşe iki tura atarak.) Eğer toplam $n - 2$ olmazsa, ki $1 - p(n-2)$ olasılıkla olmaz, o zaman toplam $n - 1$ olmak zorunda ve bu durumda 1/2 olasılıkla n'ye ulaşırız. Demek ki,

$$\begin{aligned} p(n) &= p(n-2)\times 3/4 + (1 - p(n-2))\times 1/2 \\ &= p(n-2)/4 + 1/2. \quad (*) \end{aligned}$$

Bir an için $p(n)$'lerin limiti olduğunu varsayalım ve bu limite x diyelim. Yukardaki eşitliğin sağının ve solunun limitini alırsak,

$$x = x/4 + 1/2$$

buluruz, yani $x = 2/3$. Demek ki limit varsa bu limit 2/3'e eşit olmak zorunda. Şimdi limitin olduğunu kanıtlayalım

Yukardaki (*) eşitliği, tek n'ler ve çift n'ler için, $p(n)$ olasılıklarının değişik biçimde davranabileceklerini fısıldıyor. Nitekim, eğer n'ler tekse $p(n)$'ler artıyor ve eğer n'ler çiftse $p(n)$'ler azalıyor, hatta,

$$p(1) < p(3) < p(5) < \dots < 2/3 < \dots < p(4) < p(2)$$

Bunu kanıtlayalım.

Sav 1. *n tekse $p(n) < 2/3$ ve n çiftse $p(n) \geq 2/3$.*

Kanıt. Kolay. Tümevarımla, (*) kullanarak.

Sav 2. *$(p(2n+1))_n$ dizisi artıyor, $(p(2n))_n$ dizisi azalıyor.*

Kanıt. Kolay. Tümevarımla, Sav 1'i kullanarak.

Sav 3. *$(p(n))_n$ dizisinin limiti vardır ve bu limit 2/3'tür.*

Kanıt. Sav 2'den ve analizde bilinen bir teoremden dolayı[1], $(p(2n+1))_n$ ve $(p(2n))_n$ dizilerinin limitleri vardır. (*) eşitliğinden bu limitlerin her ikisinin birden 2/3 olduğu çıkar. Demek ki $(p(n))_n$ dizisinin limiti vardır ve bu limit 2/3'tür.

Demek ki n çok büyük olduğunda, toplamın n olma olasılığı 2/3'e çok yakın bir sayıdır. ♥

1 **Teorem.** *Artan ve yukardan sınırlı bir gerçel sayı dizisinin limiti vardır. Azalan ve alttan sınırlı bir gerçel sayı dizisinin limiti vardır.*