

# Dikkat Paradoks Var!

Burak Bitlis\*  
burak\_bitlis@hotmail.com



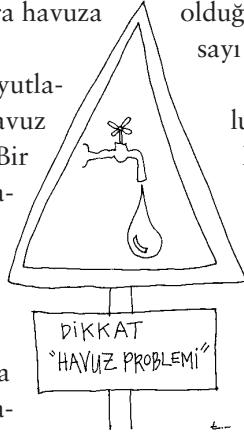
## Her Şeyin Bir Sınırı Var mı?

**B**u yazıma bir havuz probleminden söz ederek başlayacağım ama sanırım okuduklarınızın ve okuyacaklarınızın en karmaşığı olacak.

Bir havuz düşünelim. Bunu dolduracak musluk biraz sorunlu olsun, musluktan havuza saniyede sadece bir damla su aksın! Ve buharlaşma filan olmasın. Diyelim başlangıçta havuz boş. Musluğu açalım. Daha birinci saniyede havuz dolmaz elbette... İkinci saniyede gelen damla da, bir sonraki de, bir sonraki de havuzu doldurmuyacaktır. Havuz herhangi bir anda dolu gözüküyorsa bir saniye sonra da dolu gözükmeyecektir çünkü bir saniyede havuza sadece bir damla akacaktır. Bu mantıkla varacağımız sonuç, sonlu bir zaman sonra havuza dolu diyemeyeceğimizdir!

Paradoks var mı? Havuzumuzun boyutları  $25\text{m} \times 10\text{m} \times 2\text{m}$  olsun. Demek ki havuz  $500\text{m}^3$  yani 500,000 litre su alabilir. Bir damla su yaklaşık 0.03 ml olsa sonlu sayıda damlayla (dolayısıyla sonlu zamanda – yüzyıllar olsa da) havuzun dolması gerekir.

Bunun tersini düşünelim. Havuz dolu olsun. Havuzu boşaltacak musluk da dolduran musluk gibi sorunlu olsun ve saniyede bir damla su boşaltsın. Havuz doluyken boşaltma musluğunu açalım. Bir saniye sonra havuz hâlâ dolu gözükcektir. Havuz herhangi bir anda dolu gözüküyorsa bir saniye sonra da dolu gözükcektir çünkü bir saniyede havuzdan eksilen sadece bir damla su olacaktır! Havuz ne kadar zamanda doluyorsa (koşullu zaman kipine dikkat: doluyorsa!), havuzu boşaltmaya başladıktan o kadar (sonlu) zaman sonra havuzda sadece bir damla kalmış olacaktır. Demek ki havuzda kalan bir damlayla havuz dolu gözükcektir! Bu paradoksa “havuz paradoksu” diyelim.



Şimdi bu problemi terkedip değişik bir soru soralım: İlginç olmayan bir sayı var mıdır<sup>1</sup>? 1, 2, 3 gibi sayma sayılarından sözediyorum. Eğer varsa, o zaman en küçük ilginç olmayan bir sayı vardır. Bu en küçük ilginç olmayan sayı ne kadar ilginç bir sayı değil mi! İlginç olmayan sayıların en küçüğü elbette ilginç olmalı! Bir çelişkiyle karşılaştık. O zaman ilginç olmayan bir sayı yoktur, her sayı ilginçtir! Fakat kabul edersiniz ki çoğu sayı, hiçbir özelliği olmadığından hiç ilginç değildir.

Burda paradoksu yaratan kavram, “ilginç olmayan en küçük” sayı kavramıdır. İlginç olmayan ilk sayıyı sadece ve sadece ilginç olmayan ilk sayı olduğu için ilginç buluyoruz. İlginç olmayan ilk sayı ilginç mi değil mi?

Sonsuz tane doğal sayı var, yaşamım sonlu olduğundan, yaşamım boyunca aklıma hiçbir biçimde gelmeyecek doğal sayılar vardır. Aklıma hiçbir zaman hiçbir biçimde gelmeyecek bu doğal sayıların en küçüğü vardır elbette... İşte şimdi bir biçimde aklıma geldi o sayı!

Hazır istim üzerindeyken bir de Berry paradoksundan sözedeyim. Şu soruyu ele alalım. *Yirmi dört heceden daha az heceyle tanımlanamayan en küçük sayı kaçtır?* Böyle bir sayı var mıdır? Elbette vardır; sayılar sonsuz, sözcükler sonlu olduğundan... Ama o zaman da, gördüğümüz gibi bu sayıyı yukarıda italik harflerle 23 heceyle tanımlamış olduk!

Yukarıdaki paradoksların ortak özelliği birbirinin zıttı iki durum arasındaki geçişin belirsiz olmasıdır. Özetlersek havuzun dolu durumdan boş duruma geçişini ayırt edememe sorunu, aklıma gelebileceklerle aklıma gelecek arasında bir sınır olmaması, ilginç olmayan sayılarla ilginç sayılar ara-

Yukarıdaki paradoksların ortak özelliği birbirinin zıttı iki durum arasındaki geçişin belirsiz olmasıdır. Özetlersek havuzun dolu durumdan boş duruma geçişini ayırt edememe sorunu, aklıma gelebileceklerle aklıma gelecek arasında bir sınır olmaması, ilginç olmayan sayılarla ilginç sayılar ara-

\* Purdue University West Lafayette, Elektronik Mühendisliği yüksek lisans öğrencisi.

<sup>1</sup> İlhan İkedâ'nın yazısındaki Hardy'yle Ramanujan arasında hastanede geçen konuşmayı anımsayın.

sında net bir çizgi olmaması, yirmi dört heceyle tanımlanamayan en küçük sayının sırrı... Aradaki boşluklarda neler var acaba?

Yukardaki paradoksları matematiğe taşımaya çalışalım, ki paradoksların nereden kaynaklandığını anlayalım. Sonluyla sonsuz arasındaki sınırı bulmaya çalışalım. Sonlu kümelerle sonsuz kümeler arasında sınır var mıdır örneğin? Sonsuz bir küme alalım, sözgelimi doğal sayılar kümesi  $\mathbb{N}$ 'yi.  $\mathbb{N}$  kümesi sonsuz ama sonlu altkümelerin birleşimi:  $\{0\}$ ,  $\{0, 1\}$ ,  $\{0, 1, 2\}$ ,... sonlu kümelerini birleştirirsek sonsuz kümeyi elde ederiz. Sonludan sonsuza belli bir adımda geçilmiyor, yani sonlu kümeleri teker teker birleştirince her adımda sonlu küme elde ediyoruz, sadece en "sonda" (ki en son adım yok) sonsuz küme elde ediliyor. Sonluyla sonsuz arasında bir sınır yok.

Tabii yukardaki paradoksalarda edebiyat sözü konusu, matematik değil. Başka türlü de olamaz.

Bugünkü matematikte bugüne dek bir paradoks bulunamamış. Paradoksu matematik dışında aramak gerekir.

"Edebiyat" şurada: boş ya da dolu olma, ilginç olma ya da olmama, akla gelme ya da gelmeme, tanımlanma ya da tanımlanamama gibi terimleri kuşkuya yer vermeyecek biçimde tanımlamadan en geniş gündelik anlamlarıyla kullandık. Yani sezgilerimize dayandık ve iki zıt kavramın arasında belirli bir sınır olduğunu varsaydık. Bir tabureyi büyültürseniz bir zaman sonra tabure taburelikten çıkıp masa olur. Tabure tam ne zaman taburelikten çıkıp masa olduğu bilinmez. Tabureyle masa arasında belirlenmiş bir sınır yoktur.

Çok tehlikelidir sezgiler. Yararlıdır ancak tehlikelidir. Tehlikesini bile bile sezin! ♥

Kaynakça:

N.S. Hellerstein, *Diamond, A Paradox Logic*, World Scientific Publishing, 1996.

## Cengiz Han'ın Ali Cengizliği

Levent Ergenç\* / lewonet@yahoo.com

Cengiz Han'ın kuvvetleri bir köyü ele geçirirler. Yaşayanlarının zekâsıyla ünlü olan bu köyü merak eden Han, bizzat kendi gelip köylülerin zekâlarını sınavdan geçirmeye karar verir. Köy halkını meydanda toplayıp şu uzun konuşmayı yapar:

– Hepinizi öldürebilirim, ama zekânızla kurtulma şansı vereceğim size. Yarın sabah şafakla birlikte tüm köy yetişkinleri gözleri bağlanarak tek sıra oluşturulacak. Hepsine birer miğfer giydirilecek. Miğferler üç renk olacak: beyaz, mavi ve siyah. Her

renk miğferden elimizde sınırsız sayıda var ve miğferler tamamen rastgele giydirilecek. Herkesin miğferi giydirilip gözleri açılacak. Bu durumda, tek sıranın en arkasındaki kendininki hariç bütün miğ-

ferleri önünde oldukları için görebilecek. Onun önündeki ikinci kişi, birinci ve kendininki hariç tüm miğferlerin rengini görecektir... En öndeki doğal olarak kendininki de dahil hiçbir miğfer göremeyecek. En arkadan başlayarak herkes kendi başında-

ki miğferin rengini teker teker tahmin etmeye çalışacak. Bir dakika içinde cevap vermeyen, ya da yanlış bilen öldürülecek. Bilen kurtulacak. Arkanızdakilerin yanıtlarını hepiniz duyacaksınız. Size bir gece veriyorum, en fazla kişiyi kurtaracak bir yöntem geliştirip aranızda

anlaşın, plan belirleyin...

Yetişkin köylü sayısı  $n$  ise, Cengiz Han'ın oyununun kurallarına uyararak en çok kişiyi kesinlikle kurtaracak yöntem nedir? Bu yöntemle kesinlikle kurtarılacak kişi sayısı  $n$  cinsinden nedir? ♥



\* Boğaziçi Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği 1. sınıf öğrencisi.