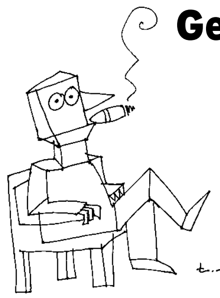


Geçen Sayının Yanıtı:

Köşeyi Dönen Robot

Problem. Bir robot, hem sağına hem soluna doğru sonsuz uzanan bir duvarın önünde. Duvarda her metrede bir bir kapı var. Kapıların sadece biri açık, diğerleri kapalı. Açık kapı ya sağda ya solda, az ya da çok ileride, ama kesinlikle kapılardan biri açık, ve açık kapının nerde olduğunu bilmiyoruz. Robot açık kapıyı bulmalı. Robot kapının açık olduğunu ancak kapının tam yanındayken anlayabiliyor. Robotu nasıl programlamalıyız ki robot en az mesafe yürüyerek açık kapıyı bulsun? Robot sağa ya da sola gidebilir. Her gittiği yerde önündeki kapının açık mı kapalı mı olduğunu anlayabilir.

Bir Yöntem. Şu yöntemi irdeleyelim: Duvarı bir doğru olarak görelim. Robotun bulunduğu noktaya 0 noktası diyelim. Her metrede bir bir kapı var. Kapıları tamsayılarla numaralandıralım. Soldaki kapıların numaraları eksi sayılar olsun, sağdakilerin artı. Robot, önce 1 kapısına gitsin ve o kapı açık mı diye baksın (robot 1 metre yürüdü). Kapalıysa, robot –1 kapısına gitsin ve o kapıya baksın (robot 2 metre daha yürüdü). Kapı gene kapalıysa, bu sefer öbür istikamete gitsin, ta 2 kapısına kadar (robot 3 metre daha yürüdü). Kapıyı açık bulursa ne âlâ. Bulamazsa –2 kapısına gitsin (robot 4 metre daha yürüdü). Ve robot böylece devam etsin. Açık kapıyı bulana kadar robot en fazla kaç metre yürüyecek?

Yürünen Mesafe	Kapı
1	1
2	–1
3	2
4	–2
5	3
6	–3
7	4
8	–4

Diyelim ki açık kapının numarası $-n < 0$. Açık kapının numarası pozitif olsaydı, ufak bir fark olsa da, açık kapı daha kısa sürede bulunacaktı. Fakat biz en uzun mesafeyle ilgileniyoruz.

Robot, bu yöntemle, $1 + 2 + 3 + \ldots + 2n$ metre yürüdükten sonra $-n$ numaralı açık kapıya ulaşacaktır, yani toplam

$$\frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1) = 2n^2 + n \text{ metre sonra.}$$

Yukardaki Stratejinin Değerlendirmesi. Pek iyi bir sonuç sayılmaz. Eğer –1000 numaralı kapı açıksa, ki bu kapı robotun başlangıç noktasından sadece 1 kilometre uzakta, robotun açık kapıyı bulması için bu yöntemle 2.001.000 metre yani 2000 kilometreden fazla yürümesi gerekecek.

Açık kapı ne kadar uzak olursa, bu stratejimiz o kadar kötü sonuç verecektir. Çünkü yürünen uzaklık için bulduğumuz formül, açık kapının başlangıç noktasına olan uzaklığının karesi kadar büyüyor. Açık kapının numarası ikiye katlandığında, robotun yürümesi gereken mesafe dörde katlanacak. Açık kapıyı bulmanın daha kısa bir yolu var mı?

Yeni Problem. Problemi daha açık sunalım. Örneğimizde olduğu gibi, başlangıç noktasıyla açık kapı arasındaki uzaklığın karesine bağımlı olan bir arama yöntemi yerine, doğrusal bağımlı olacak bir arama yöntemine "daha iyi bir yöntem" diyelim. Daha açık bir ifadeyle: Eğer açık kapı, robotun bulunduğu yerden n metre uzaktaysa, öyle bir strateji (algoritma) istiyoruz ki,

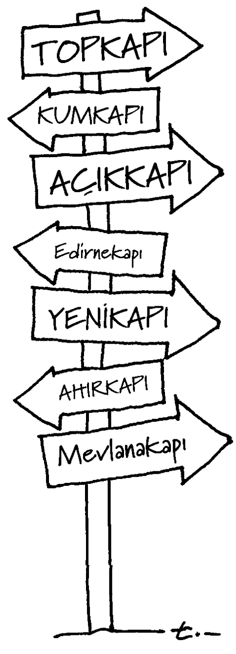
(1) robot açık kapıyı mutlaka bulsun, ve

(2) robotun bu stratejiyi izleyerek n mesafe ilerdeki açık kapıyı bulmak için gideceği $f(n)$ mesafesi, bir C sabiti için,

$$f(n) \le Cn$$

koşulunu sağlasın.

C sabitinin n'den bağımsız olması gerektiğine dikkatinizi çekeriz.



Bu "daha iyi" tanımıyla daha iyi bir yöntem geliştirebilir miyiz? Varsa C'nin değeri nedir? C'yi ne kadar küçültebiliriz? Geçen sayımızda bu soruyu sormuştuk.

Bir Başka Yöntem. Şu yöntemi ele alalım: Robot, önce 2^0 noktasına, sonra -2^1 noktasına, sonra 2^2 noktasına, sonra -2^3 noktasına, sonra 2^4 noktasına, sonra -2^5 noktasına, sonra 2^6 noktasına gitsin ve seyahatini böylece sürdürsün. Bakalım bu yöntemle robot kapıyı bulana kadar ne kadarlık yol gidecek.

Önce açık kapının solda olduğunu varsayalım, diyelim açık kapı $-n$ noktasında ($n > 0$). k tamsayısı, $2^{2k-1} < n \leq 2^{2k+1}$ eşitsizliklerini sağlayan bir doğal sayı olsun. Robot açık kapıyı bulmak için,

$$f(n) = (2^0+2^0) + (2^1+2^1) + (2^2+2^2) + (2^3+2^3) + \ldots + (2^{2k-1}+2^{2k-1}) + (2^{2k}+2^{2k}) + n$$

kadar yürüyecektir. Demek ki,

$$\begin{aligned} f(n) &= 2(2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2k}) + n \\ &= 2(2^{2k+1} - 1) + n < 2(4 \times 2^{2k-1} - 1) + n \\ &< 8 \times 2^{2k-1} + n < 9n. \end{aligned}$$

Demek ki, bu yöntemle, kapı soldaysa, $f(n) \leq 9n$ eşitsizliği sağlanıyor.

Şimdi açık kapının sağda olduğunu varsayalım, diyelim açık kapı n noktasında ($n > 0$). k tamsayısı, $2^{2k-2} < n \leq 2^{2k}$ eşitsizliklerini sağlayan bir doğal sayı olsun. Robot açık kapıyı bulmak için,

$$f(n) = (2^0+2^0) + (2^1+2^1) + (2^2+2^2) + (2^3+2^3) + \ldots + (2^{2k-1}+2^{2k-1}) + n$$

kadar yürüyecektir. Demek ki,

$$\begin{aligned} f(n) &= 2(2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2k-1}) + n \\ &= 2(2^{2k} - 1) + n \\ &= 8 \times 2^{2k-2} + n < 9n; \end{aligned}$$

kapı sağdaysa da $f(n) \leq 9n$ eşitsizliği sağlanıyor.

Bu yöntem çok daha iyi, çünkü hep $f(n) \leq 9n$ eşitsizliğini sağlıyor. Burada $C = 9$.

Daha İyi Bir Yöntem Arayışı. Robot, 2^n mesafelere gideceğine, 3^n mesafelerine de gidebilirdi. Robot, belli bir $a > 1$ için a^n mesafelere gitsin. Yukarda, $a = 2$ için $f(n) < 9n$ eşitsizliğini gördük. Bu sefer, $f(n) < g(a)n$ türünden bir eşitsizlik elde edeceğiz. Önce g'yi bulup, daha sonra $g(a)$'yı en küçük yapan a'yı bulacağız. Büyük bir olasılıkla 9'un altına ineceğiz... Bakalım ne olacak.

Önce açık kapının solda olduğunu varsayalım, diyelim açık kapı $-n$ noktasında ($n > 0$). k tamsayısı, $a^{2k-1} < n \leq a^{2k+1}$ eşitsizliklerini sağlayan bir doğal sayı olsun. Aynen yukarda yaptığımız gibi hesaplayalım:

$$\begin{aligned} f(n) &= (a^0+ a^0) + (a^1+ a^1) + (a^2+ a^2) + (a^3+ a^3) + \ldots + (a^{2k-1}+ a^{2k-1}) + (a^{2k}+ a^{2k}) + n \\ &= 2(a^0 + a^1 + a^2 + \ldots + a^{2k}) + n \\ &= 2\frac{a^{2k+1}-1}{a-1} + n < 2\frac{a^{2k+1}}{a-1} + n \\ &= \frac{2a^2}{a-1}a^{2k-1} + n < \left(\frac{2a^2}{a-1}+1\right)n \end{aligned}$$

Demek ki kapı soldaysa

$$f(n) < \left(\frac{2a^2}{a-1}+1\right)n$$

eşitsizliği sağlanıyor.

Şimdi açık kapının sağda olduğunu varsayıp hesaplayalım. Hesapları göstermiyoruz, aynen yukardaki gibi... Gene

$$f(n) < \left(\frac{2a^2}{a-1}+1\right)n$$

eşitsizliğini buluruz.

Şimdi

$$g(a) = \frac{2a^2}{a-1}+1$$

fonksiyonunun en küçük değerini veren $a > 1$ sayısını bulalım.

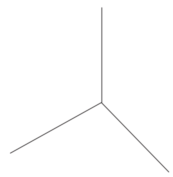
Bunun için,

$$h(a) = \frac{a^2}{a-1}$$

fonksiyonunun aldığı en küçük değeri bulmak yeterli. Türevini alalım:

$$h'(a) = \frac{2a-a^2}{(a-1)^2}.$$

Türev ne yazık ki sadece 0 ve 2'de sıfırlanıyor. $a > 1$ olduğundan, sadece $a = 2$ olduğunda yerel minimum buluyoruz, bunun da minimum olduğunu anlamak zor değil. Yani en iyi yöntem gene $a = 2$. Daha iyi bir yöntem bulamadık.



Soru Soruyu Doğurur. İlginç problemler her zaman ilginç problemler doğurur. Yukardaki sorduğumuz soruyu zorlaştıralım. Robotun bir duvar önünde olduğunu değil de, üçe ayrılan ve herbiri sonsuz uzunlukta olan bir yol ayrımında olduğunu varsayabiliriz. Yolların bir tarafında, diyelim sağında, her metrede bir bir kapı var... Robot kapıyı hangi yöntemle aramalı?

Bu soruyu çoğaltabiliriz. Peki ya aşağıdaki gibi durmadan ikiye ayrılan bir yola ne demeli? Her metrede bir yol ikiye ayrılıyor ve yol kavşaklarının birinde bir hazine var. Robot başlangıç noktasında ve hazineyi bulacak. Hazineyi olabildiğince çabuk bulabilmek için, robot nasıl bir arama yöntemi izlemeli? ♥