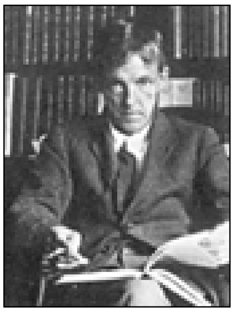
Hardy, Littlewood, Ramanujan

K. İlhan İkeda* / *ilhan@bilgi.edu.tr*


G.H. Hardy

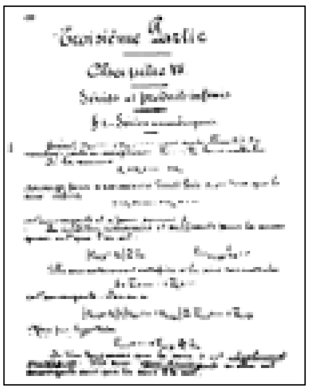
Ünlü matematikçi G. H. Hardy'nin **Bir Matematikçinin Savunması** adlı derin kitabının tanıtımını bu sayının Yayın Köşesi'nde bulabilirsiniz.

Bu yazıda Hardy ve iki yakın çalışma arkadaşı Littlewood ve Ramanujan'la ilgili kısa da olsa bilgi vermenin yerinde olacağı düşüncesindeyim.

G. H. Hardy. Yirminci yüzyılın en önemli soyut matematikçilerinden biri olarak kabul edilen Godfrey Harold Hardy, analitik sayılar kuramı konusunda yaptığı çok önemli çalışmalarıyla tanınır.

Matematiğe üstün yeteneği olduğu küçük yaşta anlaşılan Hardy, matematik öğrenimini İngiltere'nin o zamanların en saygın okulu olarak kabul edilen Winchester'de tamamlar. Winchester'daki son senesinde Hardy, Cambridge Üniversitesi'ne bağlı meşhur Trinity Koleji'nde yükseköğrenimini sürdürmek üzere burs kazanır.

Üniversite eğitiminin ilk yılında Hardy hangi bilim dalında uzmanlaşacağı konusunda – matematiği sevmesine ve başarılı olmasına karşın – kararsızdır. Tam o sıralarda, hocalarından biri olan A.E.H. Love (elastisite kuramında çalışmış bir uygulamalı matematikçi) sayesinde, ünlü Fransız matematikçi Jordan'ın yazdığı "Cours d'Analyse" adlı kitapla tanışır. Bu eserden son derece etkilenen Hardy, bir matematikçi olmaya karar verir. 1898'de, Tripos adı verilen mezuniyet sınavlarını, kendi deyimiyle "büyük bir düşkırıklığıyla" dördüncü sırada tamamlar.


Jordan'ın Cours d'Analyse'inden bir sayfa

1911'e kadar Trinity Koleji'nde matematiksel analiz üzerine, özellikle sonsuz serilerin yakınsaklığı ve ıraksaklığı üzerine tekbaşına çalışmalar yapar. Bu esnada "A Course of Pure Mathematics" (Cambridge University Press, 1908) adlı kitabını tamamlar. Günümüzde bile yaygın olarak kullanılan bu yapıt, o zamanların İngiliz üniversitelerindeki klasik ve kemikleşmiş matematik eğitimini köklü bir şekilde değiştirecektir.

1911, Hardy için bir dönüm noktası olacaktır. Manchester Üniversitesi'nden John Littlewood Trinity Koleji'ne geri dönmüştür. Bu iki yetenekli matematikçi arasındaki 35 yıl sürecek ve son derece verimli geçecek matematiksel işbirliğinin temelleri o yıl atılacaktır.


J. Littlewood

J. Littlewood. İlköğreniminin bir bölümünü matematikçi babasının görevi nedeniyle Güney Afrika'nın Cape Town şehrinde tamamlayan Littlewood'un haylazlığı ana babasını tedirgin eder. Sonuç olarak, daha disiplinli ve iyi bir eğitim alması için küçük Littlewood'u ailesi Londra'da bulunan St. Paul okuluna gönderir.

O sıralarda, St. Paul okulunda cebirsel geometri konusunda pek çok önemli çalışmalar yapmış olan meşhur F. Macaulay matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır. Günümüz için bile reformist sayılabilecek pedagojik fikirlere sahip olan Macauley, St. Paul lisesinde Littlewood'un matematik hocası olur. Littlewood çok iyi bir temel matematik eğitimi alır.

1903'te burslu olarak Trinity Koleji'nde üniversite eğitimine başlayan Littlewood, Riemann

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.

Hipotezi üzerine araştırmalar yapar. 1907-1910 arasında Manchester Üniversitesi'nde hocalık yapan Littlewood, Hardy'yle uzun yıllar verimli çalışmalar yapacağı eski okulu Trinity Koleji'ne 1911'de geri gelir.

Hardy ve Littlewood, beraberlikleri süresince, analitik sayılar kuramında birinci sınıf ve temel sonuçlar elde edeceklerdir.

Ve Hindistan'dan mektup gelir! 1913'ün başlarında Hardy Hindistan'dan esrarengiz bir mektup alır...

Nasıl 1911 Hardy'nin akademik yaşamında bir dönüm noktası olduysa, üç yıl sonra, bu mektubun geldiği gün de Hardy'nin hayatındaki ikinci dönüm noktası olacaktır.


S. Ramanujan

Dâhi Ramanujan. Madras (şimdiki adıyla Chennai) şehri liman işletmeleri muhasebe bölümünde katip S. Ramanujan tarafından Hardy'ye yazılmış olan bu mektup, yaklaşık 120 matematik formülünden ibaretti. Bu formüllerin bir kısmı Hardy ve Littlewood tarafından biliniyordu, veya formülleri kanıtlayabiliyorlardı. Fakat geri kalan formüller, Hardy ve Littlewood'un en çılgın düşlerinde bile hayal edemeyecekleri zorlukta ve güzellikteydi. Bu iki İngiliz matematikçinin esrarengiz mektuptan çıkan formüller karşısında nasıl şaşkınlık ve hayret içinde kaldıklarını Hardy'nin kendi cümlelerinden alıntı yaparak anlayabiliriz. "*... Daha önce böyle formüllerle hiç karşılaşmamıştım. İlk bakışta, bu formüllerin ancak en üstün sınıfa mensup bir matematikçi tarafından yazıldığını anlamıştım. Bu formüller doğru olmalıydı, çünkü hiçbir akıl böyle formüller icat edebilecek hayalgücüne sahip olamazdı...*" Örneğin,

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\right)^3+13\left(\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\right)^3+\cdots=\frac{2}{\pi}$$

formülü Ramanujan'ın mektubunda yer alan en sade formüllerden biridir, ve "Batı'da" Bauer formülü olarak Legendre serileri teorisinde bilinmektedir.

Ramanujan'ın yeteneklerinden biri de belli özellikler taşıyan sayıları çok çabuk bulabilmesidir. Ramanujan'ın bu özelliğiyle ilgili, Hardy'nin başından geçmiş, bilinen olay, şöyle cereyan etmişti: Ramanujan sağlık problemleri yüzünden İngiltere'de hastanededir. Hardy ziyaretine gelmiştir. Konuşmak icin konu açmaya çalışan Hardy, bindiği taksinin plaka numarasının 1729 olduğunu, ve bu sayının oldukça sıradan, hiçbir özelliği olmayan bir sayı olduğunu söyler. Ramanujan'ın yanıtı ise şöyle olur. *Yanlış Hardy! 1729 çok ilginç bir sayıdır, çünkü 1729, iki farklı şekilde, iki kübün toplamı biçiminde yazılabilen en küçük sayıdır*! Gerçekten de biraz hesap yaparak 1729 sayısının $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ olduğunu görürüz. Bunun üzerine, Hardy iki farklı şekilde, iki kuartiğin toplamı biçiminde yazılabilen en küçük sayının ne olduğunu Ramanujan'a (biraz da hainlik olsun diye!) sorar. Birkaç dakika düşündükten sonra, Ramanujan, aklına hemen bir örnek gelmediğini, fakat bu koşulları sağlayan ilk sayının çok büyük bir sayı olması gerektiğini söyler. Aslında Hardy'nin sorduğu sorunun cevabı Euler tarafından verilmişti: $635318657 = 158^4 + 59^4 = 134^4 + 133^4$.

Karakter olarak biribirlerinden çok farklı üç matematikçiyle tanıştık: Hardy, Littlewood ve Ramanujan. Bunların bir tek ortak yanları vardı, o da sayılara olan tutkuları!

Asal Sayılar: Asal sayılar kümesini $\mathbb{P}$ ile gösterelim. Tamsayıları ve çarpmayı iyi anlamak istiyorsak, asal sayıları iyi anlamalıyız.

En az Öklid'den beri bilindiği gibi sonsuz tane asal vardır.

Şimdi, Euclid'in teoremini de içeren çok daha güçlü bir teorem kanıtlayacağız. Bu sonuç, Euler tarafından kanıtlanmıştır.

Teorem. (Euler) $\sum_{p \text{ asal}} 1/p$ *ıraksak bir seridir* (*yani toplam sonsuzdur.*)

Bir başka deyişle,

1/2,

1/2 + 1/3,

1/2 + 1/3 + 1/5

1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7

1/2 + 1/3 + 1/5 +1/7 + 1/11

dizisinin sayıları, yeterince uzağa gidildiğinde her sayıyı geçer.

Kanıt: $1 < N$ herhangi bir tamsayı olsun. Bu durumda:

$$\sum_{n=1}^{N} 1/n \leq \prod_{p \leq N}\left(\sum_{k=1}^{\infty} 1/p^k\right)$$
$$= \prod_{p \leq N}(1-1/p)^{-1}$$

eşitsizliği sağlanır (birinci eşitsizliğin doğruluğunu kanıtlamak için sağdaki çarpmayı yapın.) Diğer taraftan,

$$\log\left(\prod_{p \leq N}(1-1/p)^{-1}\right) = -\sum_{p \leq N}\log(1-1/p),$$

ve her p asal sayısı için,

$$-\log(1-1/p) = \sum_{m=1}^{\infty} 1/mp^m$$

eşitliklerini kullanarak

$$\log\left(\sum_{n=1}^{N} 1/n\right) \leq \log\left(\prod_{p \leq N}(1-1/p)^{-1}\right)$$
$$\leq \sum_p 1/p + \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$$

elde ederiz. N sonsuza gittiğinde, sol taraf sonsuz olduğundan (bir önceki yazıya bakın), sağ taraf da sonsuz olmalı. Öte yandan, gene bir önceki yazıda da belirtildiği gibi $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ sonlu bir sayı, hatta $\pi^2/6$. Kanıtımız tamamlanmıştır, demek ki $\sum_{p \in \mathbb{P}} 1/p$ sonsuz bir sayıdır.

Euler'in elde ettiği bu sonuç, sayılar kuramında pek çok gelişmeye sebep olmuştur. Özellikle aritmetiksel bilgileri içinde saklayan Riemann ζ-fonksiyonunun ortaya çıkışını bu teoreme bağlayabiliriz.

Asal Sayıların Dağılımı. Asal sayıların dağılımı son derece esrarengizdir. Bu konuda ilk olarak Gauss şaşırtıcı öngörülerde bulunmuştur. Bu öngörülerden bahsedebilmek için, öncelikle $\pi: \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ sayaç fonksiyonunu

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{P} : p \leq x\}$$

olarak tanımlayalım.

Bu durumda, Hadamard ve de la Vallée Poussin, Gauss'un sanıtı olan $\pi(x) \approx x/\log x$ asimtotik formülünü kanıtlarlar.

Bu gelişmeler arasında en şaşırtıcı olanlarından biri Brun tarafından 1919'da elde edilmiştir:

Teorem. (Brun) $\mathbb{P}_2 = \{p \in \mathbb{P} : p + 2 \in \mathbb{P}\}$ *olsun. Bu durumda,*

$$\sum_{p \in \mathbb{P}_2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right)$$

yakınsak bir seridir (yani sonlu bir sayıdır.)

Bu teoremin sonucu olarak, hemen aklımıza şu önemli soru gelir:

İkiz Asallar Sanıtı. $\mathbb{P}_2$ kümesi sonlu mu yoksa sonsuz mudur? Asimtotik olarak dağılımı nasıldır?

Bu sorunun yanıtı bugün de bilinmemektedir.

Hardy-Littlewood Sanıtı. Aslında ikiz asallarla ilgili olan bu problem, asal sayılarla ilgili son derece genel bir problemin çok özel bir hali olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu probleme Hardy-Littlewood Sanıtı denmektedir. Bu sanıt, belli şartları sağlayan asal sayılardan oluşmuş kümeler için belli öngörüler getirmektedir. ♥

Kaynakça

V. Brun, 1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + ... *où les dénominateurs sont "nombres premiers jumeaux" est convergente ou finie*, Bull. Sci. Math., 43 (1919) 100-104 ve 124-128.

G. H. Hardy, *The Indian Mathematician Ramanujan*, Amer. Math. Monthly, 44 (1937).

G. H. Hardy, **A Mathematician's Apology**, Cambridge University Press 1940.

K. Ireland ve M. Rosen, **A Classical Introduction to Modern Number Theory**, Springer-Verlag 1990.

P. Ribenboim, **The Little Book of Big Primes**, Springer-Verlag 1991.

J. H. Silverman, *Taxicabs and Sums of Two Cubes*, Amer. Math. Monthly, 100 (1993) 331-340.