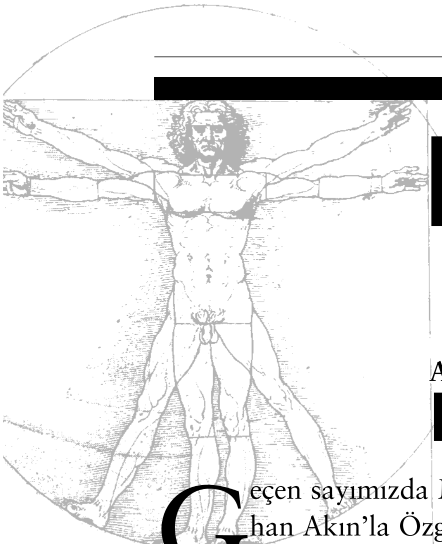


Proje Köşesi

Nihat Ayber*
aybern@mef.k12.tr

Aslıhan Akın ve Özgür Paksoy'un Projeleri

Fibonacci Sayıları II

Geçen sayımızda Mef Okulları'ndan Aslıhan Akın'la Özgür Paksoy'un Fibonacci sayılarının ilginç özelliklerini irdeleyen projelerini sunmaya başlamıştık. Devam ediyoruz.

Önce Fibonacci dizisinin tanımını anımsatalım:

$$f_0 = 0,\ f_1 = f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

olarak tanımlanan diziye **Fibonacci dizisi**, dizinin terimlerine de **Fibonacci sayıları** adı verilmiştir. Dizi şöyle başlar:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Görüldüğü üzere, üçüncüden itibaren her sayı kendinden önceki iki sayının toplamına eşittir.

Bu sayıda aşağıdaki teoremi kanıtlayacağız:

Teorem. *$n > 2$ ise, ${f_n}^2$ sayısının f_m sayısını bölmesi için gerek ve yeter koşul nf_n'nin m'yi bölmesidir.*

Kanıt: Birkaç önsava ihtiyacımız olacak.

Önsav 0. *f_n'nin f_m'yi bölmesi için gerek ve yeter koşul n'nin m'yi bölmesidir.*

Kanıt: Geçen sayımızda kanıtlamıştık bunu.

Önsav 1. *Eğer $n \geq 1$ ise f_n ve f_{n+1} aralarında asaldır.*

Kanıt: Fibonacci dizisinin tanımından tümevarımla kolaylıkla kanıtlanır. Ayrıntıları okurlara bırakıyoruz.

Önsav 2. *Her n ve $k \geq 1$ için,*

$$f_{n+k} = f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n.$$

Kanıt: k üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız.

Eğer $k = 1$ ise, bildiğimiz $f_0 = 0$ *ve* $f_1 = f_2 = 1$ eşitliklerinden Önsav 2 çıkar: $f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n = f_1 f_{n+1} + f_0 f_n = f_{n+1} = f_{n+k}$.

Eğer $k = 2$ ise, $f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n = f_2 f_{n+1} + f_1 f_n = f_{n+1} + f_n = f_{n+2} = f_{n+k}$. Demek ki Önsav 2 gene doğru.

Şimdi önsavımızın k ve $k + 1$ için doğru olduğunu varsayıp (tümevarım varsayımları), önsavı $k + 2$ için kanıtlayalım: $f_{n+k+2} = f_{n+k+1} + f_{n+k} = (f_{k+1} f_{n+1} + f_k f_n) + (f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n) = (f_{k+1} + f_k)f_{n+1} + (f_k + f_{k-1})f_n = f_{k+2}f_{n+1} + f_{k+1}f_{n+1}$ (birinci ve son eşitlik Fibonacci dizisinin tanımlarımdan, ikinci eşitlik tümevarım varsayımlarımızdan.) Kanıt bitmiştir.

Önsav 3. *Her n ve $k \geq 1$ için,*

$$f_{kn} \equiv k f_n f_{n+1}^{k-1} (\mathrm{mod}\ f_n^2) \text{ ve } f_{kn+1} \equiv f_{n+1}^{k} (\mathrm{mod}\ f_n^2).$$

Kanıt: $k = 1$ için sorun yok ($f^0 = 1$ eşitliğini varsayıyoruz.) İlişkileri k için varsayıp k+1 için kanıtlayalım. Birinci ilişki için, yukardaki önsavda n yerine nk ve k yerine n alalım ve tümevarım varsayımlarımız kullanalım:

$$\begin{aligned}
f_{(k+1)n} &= f_{nk+n} = f_n f_{nk+1} + f_{n-1} f_{nk} \equiv \\
&\equiv f_n f_{n+1}^{k} + f_{n-1} k f_n f_{n+1}^{k-1} = \\
&= f_n f_{n+1}^{k} + (f_{n+1} - f_n) k f_n f_{n+1}^{k-1} = \\
&= (k+1) f_n f_{n+1}^{k} - k f_n^2 f_{n+1}^{k-1} \equiv \\
&\equiv (k+1) f_n f_{n+1}^{k} (\mathrm{mod}\ f_n^2).
\end{aligned}$$

Birinci ilişki böylece k üzerine tümevarımla kanıtlanmış oldu. Sıra ikinci ilişkiye geldi. Gene k üzerine tümevarım yapacağız. Yukardaki önsavda n yerine kn ve k yerine n+1 alalım ve gene (elbette!) tümevarım varsayımlarımız kullanalım:

$$\begin{aligned}
f_{(k+1)n+1} &= f_{kn+n+1} = f_{n+1} f_{kn+1} + f_n f_{kn} \equiv \\
&\equiv f_{n+1} f_{n+1}^{k} + f_n k f_n f_{n+1}^{k-1} \equiv \\
&\equiv f_{n+1}^{k+1} (\mathrm{mod}\ f_n^2).
\end{aligned}$$

Böylece önsavımızın ikinci ilişkisi de kanıtlanmış oldu.

Şimdi teoremimizi kanıtlamak için yeterince silaha sahibiz:

* MEF Okulları matematik öğretmeni.

($\Rightarrow$) Diyelim f_n^2, f_m'yi bölüyor, yani $f_m \equiv 0 \pmod{f_n^2}$. Demek ki f_n, f_m'yi bölüyor. Önsav 0'a göre n, m'yi bölüyor, dolayısıyla belli bir $k \in \mathbb{N}$ için $m = nk$ eşitliği geçerlidir. f_n'nin k'yi böldüğünü kanıtlamamız gerekiyor.

Önsav 3'ün birinci eşitliğinden, f_{n+1} ve f_n sayıları aralarında asal olduklarından (Önsav 1), aşağıdaki eşdeğerlikler çıkar:

$$\begin{aligned} f_{kn} \equiv 0 \pmod{f_n^2} &\Leftrightarrow kf_n \equiv 0 \pmod{f_n^2} \\ &\Leftrightarrow k \equiv 0 \pmod{f_n}. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) nf_n sayısının m'yi böldüğünü varsayalım. O zaman, Önsav 0'a göre, f_{nf_m} sayısı f_m' yi böler. Öte yandan, Önsav 3'ün birinci eşitliğinde $k = f_n$ seçersek,

$$f_{nf_n} \equiv f_n f_n f_{n+1}^{f_n - 1} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ f_n^2)$$

elde ederiz, yani f_n^2, f_{nf_n} sayısını böler. Dolayısıyla f_n^2, f_m'yi böler.

Böylece teoremimiz de kanıtlanmış oldu. ♥

Araştırma sorusu:

f_m sayısının f_n^2 sayısının bir katı olabilmesi sorusunun projedeki çözümü, benzer bir başka soruyu fısıldıyor. f_m sayısının f_n^k sayısına bölünebilmesi için m, n ve k arasında nasıl bir bağıntı olması gerekir? $k = 1$ durumu bir önceki sayımızda, $k = 2$ durumu ise yukarıda yanıtını bulmuştur. $k > 2$ durumu ayrı bir araştırma konusu olarak incelenebilir.

Soyağacı

Söyleyenlerin yalancısıyız, karıncaların mı, yoksa arıların mı, yumurtadan üreyen bir hayvanın erkeği döllenmemiş yumurtadan, dişisi de döllenmiş yumurtadan çıkarmış. Bu işin nasıl olabileceğini sormayın. Bu bilgi doğru değilse bile doğru olduğunu varsayalım.

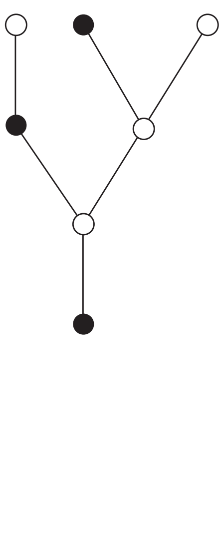
Bu bilgi doğruysa, o hayvanın erkeğinin babası olmaz sadece annesi olur. Dişisininse hem annesi hem de babası olur.

Bir erkeğin soyağacını bulalım. (Aşağıdaki şekildeki en alttaki kara nokta.)

Erkeğin sadece annesi var. (En alttaki kara noktanın üstündeki ak nokta.)

Annenin bir annesi bir babası var. (Alttan üçüncü sıradaki kara ve ak noktalar.)

Annenin annesinin bir annesi bir babası var, ama annenin babasının sadece annesi var.



Tarihte geri çıkarak soyağacını bulabiliriz. Erkekleri kara noktalarla simgeleyelim, dişileri ak noktalarla. Bu soyağacının her katında kaç hayvan vardır? 1, 1, 2, 3 diye başlıyor... ♥