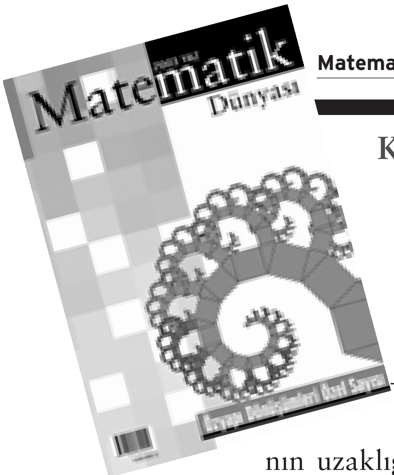


Kapak Konusu: Özyapı Dönüşümleri

Mesafeyi Değiştirmeyen Dönüşümler - İzometriler

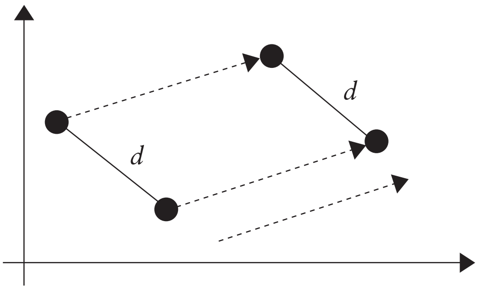
Seyfi Türkelli[1]

Düzlemde iki noktanın uzaklığını değiştirmeyen dönüşümler (fonksiyonlar) vardır. Bu dönüşümler aslında – bir anlamda – düzlemin özyapı dönüşümleridir ve bunlara **izometri** adı verilir. Birazdan bunların hepsini bulacağız.

Bu tür dönüşümlere birkaç örnek verelim:

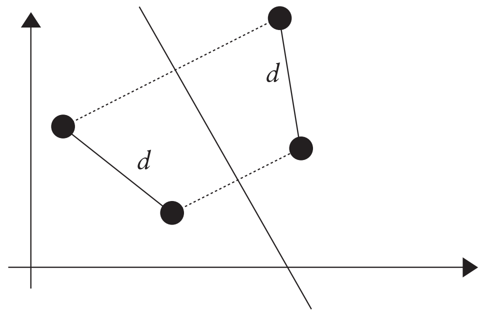
1) Öteleme. Noktaları belli bir doğrultuda ve belli bir uzaklıkta ötelediğimizde, noktaların aralarındaki mesafe değişmez. (Uygulama: Çalışma masanızı duvardan pencereye doğru itin. Masayı itmeden ve ittikten sonra ölçün. Masanın boyutları değişti mi? Aynı deneyi birkaç kez tekrarlayın. Sonuçları cetvel halinde bir kâğıda yazın.)

Bu tür dönüşümlere öteleme denir.



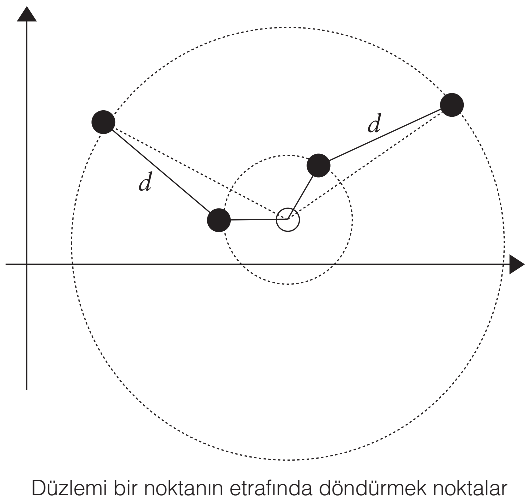
Bir vektör doğrultusunda öteleme noktaların birbirlerine olan uzaklığı değiştirmez.

2) Simetri. İki noktanın herhangi bir doğruya göre simetriğini aldığınızda, o iki nokta arasındaki mesafe değişmez. (Uygulama: Önce duvarda boyunuzu ölçün. Sonra, hiç vakit kaybetmeden, boy aynasının karşısında durup aynadaki görüntünüzün boyunu ölçün. Aynı deneyi bir yıl boyunca her gün tekrarlayın. Sonuç ve yorumlarınızı kaydedin.)



Bir doğruya göre alınan simetri noktaların birbirlerine olan uzaklığı değiştirmez.

3) Döndürü. Düzlemi belli bir nokta etrafında belli bir derece döndürmek noktalar arasındaki mesafeyi bozmaz. Bu dönüşümlere aslında rotasyon denir ama biz komiklik olsun diye döndürü diyeceğiz. (Uygulama: Küçük kardeşinizi belinden bir ipe bağlayın. İpin öbür ucunu daha önce odanızın tabanına çaktığınız bir kazığa bağlayıp kardeşinize döndürü uygulayın, yani kardeşinizi çubuğun etrafında değişik açılarda döndürün. Kardeşinizin yaka ve ayakkabı numaralarında bir değişiklik gözlemlediniz mi?)



Düzlemi bir noktanın etrafında döndürmek noktalar arasındaki mesafeyi değiştimez

Yukardaki dönüşümlerin bileşkeleri de noktalar arasındaki mesafeleri değiştirmezler. Bu yazıda, bunların birbirleriyle bileşkeleri dışında, düzlemin mesafe değiştirmeyen dönüşümü olmadığını kanıtlayacağız.

1 İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü 4. sınıf öğrencisi.

I. Gerçel Sayılar Kümesinin Mesafe Değiştirmeyen Dönüşümleri. Buna benzer bir sonucu önce gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ için kanıtlayalım, daha kolay olacak. Gerçel sayılarda x ve y arasındaki mesafe, herkesin bildiği üzere, $|x - y|$ olarak tanımlanır. Demek ki,

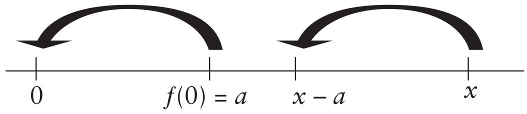
$$|x - y| = |f(x) - f(y)|$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümlerini (fonksiyonlarını) bulmak istiyoruz. Başlayalım.

f böyle bir dönüşüm olsun. Aşağıda, f'yi adım adım değiştirerek en sonunda $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ (yani birim fonksiyonu, yani hiçbir noktanın yerini değiştirmeyen fonksiyon) yapacağız. Birinci adımda f'yi $f(0) = 0$ eşitliğini sağlayan bir dönüşümle değiştireceğiz. İkinci adımda f'yi $f(0) = 0$ ve $f(1) = 1$ eşitliğini sağlayan bir dönüşümle değiştireceğiz. Üçüncü adımda böyle bir dönüşümüm hiçbir noktanın yerini değiştirmediğini kanıtlayacağız. İlk iki adımda yaptığımız değişimleri bildiğimizden, üçüncü adım bize mesafeleri değiştirmeyen tüm dönüşümleri verecek.

Birinci Adım: İlk olarak 0'ı tekrar 0'a geri getireceğiz. Şöyle yapalım: Diyelim 0 noktası f altında a noktasına gitti, yani $f(0) = a$. Tüm x noktalarını $x - a$ noktalarına gönderen dönüşüme t_{-a} diyelim ve $t_{-a} \circ f$ dönüşümüne bakalım. Bu dönüşüm hâlâ daha mesafeleri korur (çünkü hem f hem de t_{-a} dönüşümü mesafeleri korur). Dahası, bu dönüşüm 0 noktasını 0 noktasına yollar:

$$(t_{-a} \circ f)(0) = t_{-a}(f(0)) = t_{-a}(a) = a - a = 0.$$



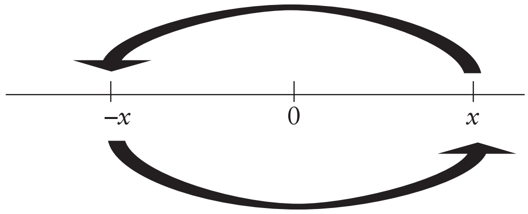
t_{-a} dönüşümü

İkinci Adım: Yukarda 0 noktasını 0 noktasına geri götürdük. Bu ikinci adımda f'nin ayrıca bu özelliği olduğunu varsayalım. Demek ki f dönüşümü

a) Noktalar arasındaki mesafeyi koruyor, ve

b) $f(0) = 0$.

Şimdi, yukardaki iki özelliği bozmadan 1 noktasını 1 noktasına yollattıracağız. Aşağıdaki eşitliklere bakalım: $1 = |1 - 0| = |f(1) - f(0)| = |f(1) - 0| = |f(1)|$, yani $|f(1)| = 1$. Demek ki $f(1)$ ya 1'e ya da -1'e eşit. $f(1) = \varepsilon = \pm 1$ olsun.



r_{-1} dönüşümü, 180 derecelik döndürücü...

Şimdi $r_\varepsilon(x) = \varepsilon x$ dönüşümüne bakalım[1]. Bu dönüşüm noktalar arasındaki mesafeyi bozmaz ve bu da, f gibi, 0 noktasını 0 noktasına gönderir.

Şimdi $r_\varepsilon \circ f$ dönüşümünü ele alalım. Bu $r_\varepsilon \circ f$ dönüşümü hâlâ daha noktalar arasındaki mesafeyi korur, ayrıca 0'ı 0'a ve 1'i 1'e gönderir:

$$(r_\varepsilon \circ f)(0) = r_\varepsilon(f(0)) = r_\varepsilon(0) = \varepsilon 0 = 0.$$
$$(r_\varepsilon \circ f)(1) = r_\varepsilon(f(1)) = r_\varepsilon(\varepsilon) = \varepsilon^2 = 1.$$

Demek ki, eğer f, 0 noktasını 0 gönderiyorsa, $r_\varepsilon \circ f$ dönüşümü noktalar arasındaki mesafeyi korur, ayrıca 0'ı 0'a ve 1'i 1'e gönderir.

Üçüncü Adım. Yukarda 1 noktasını tekrar 1 noktasına geri götürdük, ayrıca 0 da 0'a gidiyor. Şimdi dönüşümümüzün bu iki özelliği sağladığını varsayalım. Demek ki f dönüşümü,

a) Noktalar arasındaki mesafeyi koruyor,

b) $f(0) = 0$,

c) $f(1) = 1$.

Bu üç özelliği sağlayan bir dönüşümün hiçbir noktanın yerini değiştirmeyeceğini, yani özdeşlik fonksiyonu olduğunu kanıtlayacağım şimdi.

Herhangi bir x noktası (sayısı) alalım. İki küçük hesap yapalım:

$$|x| = |x - 0| = |f(x) - f(0)| = |f(x)|,$$
$$|x - 1| = |f(x) - f(1)| = |f(x) - 1|.$$

Birinci hesaptan $f(x) = \pm x$ çıkar. Diyelim $f(x) = -x$. Bundan ve ikinci hesaptan $\pm(x - 1) = -x - 1$ çıkar. Bunun tek bir çözümü vardır: $x = 0$. Demek ki $f(x) = -x$ ise, $x = 0$ ve $f(x) = x$.

İstediğimizi kanıtladık, yani böyle bir f, birim fonksiyonu olmak zorunda.

Özetleyin. Noktalar arasındaki mesafeyi değiştirmeyen herhangi bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü aldık.

Birinci adımda $t_{-a} \circ f$ dönüşümünü alarak 0'ı 0'a yolladık (Burada $a = f(0)$.)

1 Her $x \in \mathbb{N}$ için, $r_1(x) = x$ ve $r_{-1}(x) = -x$.

İkinci adımda, belli bir $\varepsilon = \pm 1$ için, $r_\varepsilon \circ t_{-a} \circ f$ dönüşümünün 0'ı 0'a ve 1'i 1'e yolladığını kanıtladık (Burada $\varepsilon = (t_{-a} \circ f)(1) = t_{-a}(f(1)) = f(1) - a = f(1) - f(0)$.)

Üçüncü adımda böyle bir dönüşümün $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ olduğunu kanıtladık, yani $r_\varepsilon \circ t_{-a} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, yani $f = t_a \circ r_\varepsilon$.

Teorem. *Gerçel sayıların mesafeyi değiştirmeyen dönüşümleri kümesi*

$$\{t_a \circ r_\varepsilon : a \in \mathbb{R}, \varepsilon = \pm 1\}$$

kümesidir.

Eğer f mesafeleri değiştirmeyen bir dönüşümse, f,

$$f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$$

olarak tanımlanan dönüşümüdür. Burada $f(1) - f(0) = \pm 1$ *olmak zorundadır*[3].

II. Gerçel Düzlemin Mesafe Değiştirmeyen Dönüşümleri

Şimdi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, mesafeleri değiştirmeyen bir dönüşüm olsun. Yukardaki gibi f'yi yavaş yavaş birim fonksiyonuna dönüştüreceğiz.

Birinci Adım. Yukardaki gibi, önce (0, 0) noktasını gittiği yerden geri getirelim. Şöyle yapalım: $f(0, 0) = (a, b)$ ise, noktalarımızı $(-a, -b)$ yönüne doğru öteleyelim, ki (a, b) noktasına giden (0, 0) noktası tekrar (0, 0) noktasına geri dönsün. Bir başka deyişle, $t_{(-a,-b)}$ dönüşümü,

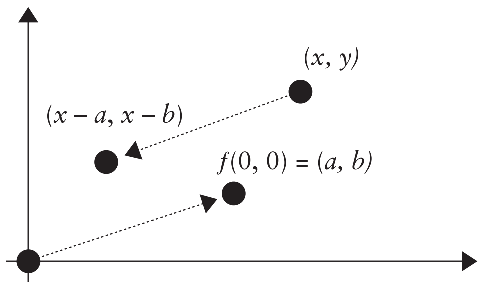
$$t_{(-a,-b)}(x, y) = (x - a, y - b)$$

olarak tanımlanmış ötelemeyse, f yerine

$$t_{(-a,-b)} \circ f$$

dönüşümüne bakalım. Bu dönüşüm noktaların mesafesini bozmadığı gibi, ayrıca (0, 0) noktasının yerini de değiştirmez:

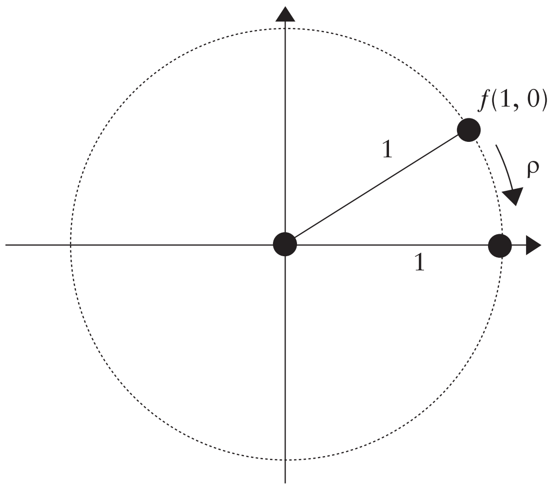
$$(t_{(-a,-b)} \circ f)(0, 0) = t_{(-a,-b)}(f(0, 0)) = t_{(-a,-b)}(a, b) = (a - a, b - b) = (0, 0).$$



$t_{(-a,-b)}$ ötelemesi
$t_{(-a,-b)}(x, y) = (x - a, y - b)$

İkinci Adım. Şimdi f, noktaların aralarındaki mesafeyi değiştirmeyen ve $f(0, 0) = (0, 0)$ eşitliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. f'yi değiştirerek, f'ye (1, 0) noktasını da sabitlettireceğiz. (1, 0) noktasının (0, 0) noktasına uzaklığı 1. Bu yüzden, f, (0, 0) noktasını sabitlediğine göre, mesafeleri de değiştirmediğine göre ve f, (1, 0) noktasını (0, 0)'dan uzaklığı gene 1 olan bir başka noktaya yollar. (0, 0) merkezli bir döndürüyle bu noktayı tekrar (1, 0) noktasına geri götürebiliriz: Öyle bir ρ döndürüsü vardır ki, $\rho \circ f$ dönüşümü,

a) Noktalar arasındaki mesafeyi korur,
b) (0, 0)'ın yerini değiştirmez,
c) (1, 0)'ın yerini değiştirmez.

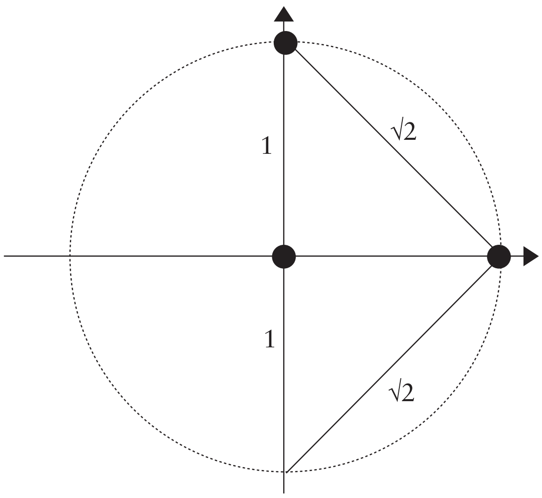


Üçüncü Adım. Şimdi f'nin yukardaki üç özelliği sağladığını varsayalım. Bu sefer (0, 1) noktasını tekrar (0, 1) noktasına geri götüreceğiz. (0, 1) noktasının (0, 0) noktasından uzaklığı 1, (1, 0) noktasından uzaklığı $\sqrt{2}$'dir. Dolayısıyla (0, 1) noktasının gittiği yer de bu iki özelliği sağlamalı. Yani (0, 1) noktası ya gene (0, 1) noktasına ya da (0, −1) noktasına gitmeli. Bir başka deyişle, belli bir $\varepsilon = \pm 1$ için $f(0, 1) = (0, \varepsilon)$ eşitliği geçerlidir. Şimdi $r_\varepsilon(x, y) = (x, \varepsilon y)$ dönüşümüne bakalım. Bu dönüşüm, eğer $\varepsilon = 1$ ise birim dönüşümdür, eğer $\varepsilon = -1$ ise x eksenine göre simetridir. Dolayısıyla r_ε dönüşümü – aynen f gibi – noktalar arasındaki mesafeyi değiştirmez ve (0, 0) ve (1, 0) noktalarını sabitler. Dolayısıyla $r_\varepsilon \circ f$ dönüşümü de aynı özellikleri sağlar. Ayrıca $r_\varepsilon \circ f$ dönüşümü (0, 1) noktasını gene (0, 1) noktasına yollar: $(r_\varepsilon \circ f)(0,$

3 Uzmanın dilinde yukardaki sonuç $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ olarak okunur.

$1) = r_\varepsilon(f(0, 1)) = r_\varepsilon(0, \varepsilon) = (0, \varepsilon^2) = (0, 1)$. Demek ki $r_\varepsilon \circ f$ dönüşümü,

a) Noktalar arasındaki mesafeyi korur,
b) (0, 0)'ın yerini değiştirmez,
c) (1, 0)'ın yerini değiştirmez,
d) (0, 1)'ın yerini değiştirmez.



Dördüncü Adım. Şimdi f'nin yukardaki dört özelliği sağladığını varsayalım. Bu durumda f'nin birim fonksiyon olduğunu kanıtlamak oldukça kolaydır. Ayrıntıları okura bırakıyoruz.

Özetleyin. Noktalar arasındaki mesafeyi değiştirmeyen bir f dönüşümüyle başladık işe. Birinci adımda f yerine, belli bir t ötelemesi için, $t \circ f$ alarak (0, 0) noktasının sabitlendiğini varsayabildik. İkinci adım sayesinde, $t \circ f$ yerine, (0, 0) merkezli belli bir ρ döndürüsü için, $\rho \circ t \circ f$ dönüşümünü alarak sadece (0, 0) noktasının değil, ayrıca (1, 0) noktasının da sabitlendiğini varsayabiliriz. Üçüncü adım sayesinde, $\rho \circ t \circ f$ yerine, x eksenli bir r_ε simetrisi için, $r_\varepsilon \circ \rho \circ t \circ f$ dönüşümünü alarak sadece (0, 0) ve (1, 0) noktalarının değil, ayrıca (0, 1) noktasının da sabitlendiğini varsayabiliriz. Dördüncü adımda böyle bir dönüşümün birim fonksiyon olması gerektiğini söyledik (kanıtını okura bıraktık.) Demek ki, belli bir t ötelemesi, (0, 0) merkezli belli bir ρ döndürüsü ve x eksenli bir r_ε simetrisi için, $r_\varepsilon \circ \rho \circ t \circ f = \mathrm{Id}$. Aşağıdaki teoremi kanıtladık:

Teorem. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *noktaların arasındaki mesafeyi değiştirmeyen bir dönüşüm olsun. O zaman, belli bir t ötelemesi,* (0, 0) *merkezli belli bir ρ döndürüsü ve x eksenli bir r_ε simetrisi için, $f = t \circ \rho \circ r_\varepsilon$ dır*[4].

Eğer X bir kümeyse, her $x, y, z \in X$ için,
U1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
U2. $d(x, y) = d(y, x)$
U3. $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$
özelliklerini sağlayan bir $d : X \times X \to \mathbb{R}^{\ge 0}$ fonksiyonuna "uzaklık" ya da "metrik" denir. Metinde tanımlanan "mesafe"lerin herbiri yukardaki özellikleri sağlar. (X, d) çiftine de **metrik uzay** denir.

Bir X kümesi üzerine d uzaklığı verilmişse, her x, y için $d(x, y) = d(f(x), f(y))$ eşitliğini sağlayan $f : X \to X$ dönüşümlerine **izometri** denir. İzometriler, metrik uzayların özyapı dönüşümleridir. Metinde $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^2$ Öklid uzaylarının izometrileri bulunmuştur. Aşağıda sorulan sorular da bu çerçevededir.

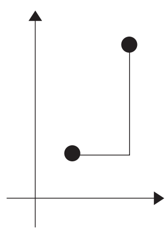
Sorular:

1. Genel olarak, $\mathbb{R}^n$ uzayının mesafe değiştirmeyen dönüşümlerini bulun. (Not: $\mathbb{R}^n$ uzayında $(x_1, ..., x_n)$ ve $(y_1, ..., y_n)$ arasındaki mesafe

$$\sqrt[2]{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

olarak tanımlanır.)

2. "Mesafe" kavramı bulunduğumuz coğrafyaya göre değişebilir. Örneğin, bir şehrin sokaklarındaysanız, bir noktadan bir diğer noktaya gitmek için düz doğruyu seçemeyebilirsiniz, karşınıza evler, hanlar, konaklar çıkar, özellikle bu iş için tasarlanmış sokaklardan yürümek zorundasınız. Örneğin New York'ta, bir noktadan bir başka bir noktaya ancak kuzey, doğu, güney ve batı yönlerine doğru giderek gidebilirsiniz.



New York sokaklarındaki (x, y) ve (z, t) noktaları arasındaki (en kısa) mesafe $d((x, y), (z, t)) = |x - z| + |y - t|$ olarak tanımlanmalı. $\mathbb{R}^2$ düzleminin bu mesafe kavramını değiştirmeyen dönüşümlerini bulun, yani her $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ için,

$$d((x, y), (z, t)) = d(f(x, y), f(z, t))$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümlerini bulun. ♥

4 Uzman dilinde bu teorem, $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) \approx (\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ olarak okunur.