Kapak Konusu: Özyapı Dönüşümleri

Doğal Sayıların Özyapı Fonksiyonları

Doğal sayılar kümesi, yani 0, 1, 2, 3 gibi tamsayıları içeren küme $\mathbb{N}$ simgesiyle gösterilir:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3,...\}$$

I. Toplamaya Göre Özyapı Fonksiyonları.

$f(x) = 2x$ fonksiyonu bir doğal sayıyı bir başka doğal sayıya gönderir (2'yle çarpar). Örneğin,

$$f(0) = 0,\ f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(5) = 10$$

dur.

Bu f fonksiyonunun şu özelliği vardır: x ve y hangi doğal sayı olurlarsa olsunlar,

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

eşitliği doğrudur, çünkü, $f(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$ eşitlikleri geçerlidir.

Her $x, y \in \mathbb{N}$ için, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ eşitliğini sağlayan fonksiyonlara **toplamsal** denir. Bunlar $(\mathbb{N}, +)$ "yapı"sının "özyapı fonksiyonları"dır. Yukarda bir örnek verdik. Tüm toplamsal fonksiyonları bulalım:

Teorem: *Eğer $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu, her $x, y \in \mathbb{N}$ için, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ eşitliğini sağlıyorsa (yani toplamsalsa), o zaman öyle bir a doğal sayısı vardır ki, her $x \in \mathbb{N}$ için, $f(x) = ax$ eşitliği geçerlidir.*

Kanıt: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ toplamsal bir fonksiyon olsun. Önce $f(0) = 0$ eşitliğini kanıtlayalım:

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$$

eşitliklerinden, $f(0) = 0$ çıkar.

Şimdi $f(1)$'e a diyelim: $f(1) = a$. Dedik! Herhangi bir x doğal sayısı alalım. $f(x) = ax$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. Kanıtlayalım:

Eğer $x = 0$ ise, $ax = a0 = 0 = f(0) = f(x)$ ve bu durumda $f(x) = ax$ eşitliği doğru.

Eğer $x = 1$ ise, $ax = a1 = a = f(1) = f(x)$ ve bu durumda $f(x) = ax$ eşitliği gene doğru.

Ya $x = 2$ ise? O zaman da doğru: $f(x) = f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = a + a = 2a = xa = ax$.

Şimdi $x = 3$ olsun: $f(x) = f(3) = f(2 + 1) = f(2) + f(1) = a2 + a = a3 = ax$. $f(x) = ax$ eşitliği doğru.

Tümevarımla, $f(x) = ax$ eşitliğinin her zaman doğru olduğu kanıtlanabilir.

Bir başka "kanıt" da şöyle yapılabilir. x herhangi bir doğal sayı olsun. x'i, x tane 1'in toplamı olarak yazalım:

$$x = 1 + 1 + \ldots + 1$$

ve bu eşitliğe f'yi uygulayalım:

$$f(x) = f(1 + 1 + \ldots + 1).$$

Sağ taraftaki sayıyı hesaplayabiliriz:

$$f(1 + 1 + \ldots + 1) = f(1) + f(1) + \ldots + f(1)$$
$$= a + a + \ldots + a = ax.$$

(İki sayı için geçerli olan $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ eşitliği aslında daha fazla sayı için de geçerlidir.) Dilediğimizi kanıtladık, demek ki $f(x) = ax$ imiş...

II. Çarpmaya Göre Özyapı Fonksiyonları.

Her x ve y için, $f(xy) = f(x)f(y)$ eşitliğini sağlayan tüm $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonlarını bulacağız. Bu tür fonksiyonlara **çarpımsal** denir.

Örneğin, eğer a bir doğal sayıysa $f(x) = x^a$ fonksiyonu çarpımsaldır.

Her şeyden önce, $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1)$ eşitliliklerinden dolayı, $f(1)$ ya 1 ya da 0 olmalıdır. Eğer $f(1) = 0$ ise, o zaman, her $x \in \mathbb{N}$ için, $f(x) = f(1 \times x) = f(1)f(x) = 0f(x) = 0$ eşitlikleri geçerlidir, dolayısıyla bu şıkta f hep 0 değerini alır. Bundan böyle f'nin hep 0 değerini almadığını varsayalım. Demek ki $f(1) \neq 0$, dolayısıyla $f(1) = 1$.

$f(0) = f(0 \times 0) = f(0)f(0)$ eşitliklerinden $f(0)$'ın ya 0 ya da 1 olduğu çıkar. Eğer $f(0) = 1$ ise, her $x \in \mathbb{N}$ için $f(x) = 1f(x) = f(0)f(x) = f(0x) = f(0) = 1$ buluruz, yani f sabit 1 fonksiyonudur. Bundan böyle f'nin sabit fonksiyon olmadığını varsayalım. Demek ki $f(0) = 0$.

Şimdi f'nin öbür sayılarda aldığı değerleri bulalım.

$f(xy) = f(x)\,f(y)$ eşitliğinden, $f(xyz) = f(x)f(y)f(z)$ eşitliği de çıkar. Hatta daha genel olarak,

$$f(x_1\, x_2 \ldots\, x_n) = f(x_1)\, f(x_2) \ldots\, f(x_n)$$

eşitliği doğrudur. Örneğin,

$$f(30) = f(2\times3\times5) = f(2)f(3)f(5)$$
$$f(60) = f(2\times2\times3\times5) = f(2)f(2)f(3)f(5).$$

Dolayısıyla, f fonksiyonunun asal sayılarda aldığı değerleri bilirsek, f'nin her sayıda aldığı değeri bulabiliriz. Yani,

$$f(2), f(3), f(5), f(7), f(11), f(13), \ldots$$

sayılarını bilmemiz gerekiyor.

f fonksiyonu asal sayılarda hangi değeri alabilir? Her değeri alabilir. Bu değerler üzerine herhangi bir koşul koymaya hakkımız yok. Örneğin, f fonksiyonu, her asal sayıyı bir sonraki sayıya yolluyorsa, yani,

$$f(2) = 3, f(3) = 4, f(5) = 6, f(7) = 8, \ldots$$

ise, $f(60) = f(2\times2\times3\times5) = f(2)f(2)f(3)f(5) = 3\times3\times4\times6 = 216$'dır.

Demek ki, her x ve y için, $f(xy) = f(x)f(y)$ eşitliğini sağlayan ve her zaman 0 ya da her zaman 1 değerini almayan $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonları, f'nin asallarda aldığı değerler tarafından belirleniyor. Bu fonksiyonlar hakkında başka bir şey söyleyemeyiz. Daha matematiksel bir deyişle, bulmaya çalıştığımız çarpımsal fonksiyonlar kümesiyle, asal sayılardan $\mathbb{N}$ kümesine giden fonksiyonlar arasında bir eşleşme vardır. Aşağıdaki teoremi kanıtladık:

Teorem. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *çarpımsal ve hep* 0 ya da hep 1 *değerini almayan bir fonksiyon olsun. O zaman* $f(0) = 0$ *ve* $f(1) = 1$*'dir ve* f*'nin asal sayılarda aldığı değerleri bilmek* f*'yi belirler. Ayrıca* f*'nin eşleşme olması için gerek ve yeter koşul,* f*'nin asal sayıların bir eşleşmesi olmasıdır.*

III. Üs Almaya Göre Özyapı Fonksiyonları. $\mathbf{S} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{N}$ için, $f(x^y) = f(x)^{f(y)}$ eşitliğini sağlayan tüm $f: \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ fonksiyonları bulalım.

Şu eşitliğe gözatın:

$$f(x)^{f(y)f(z)} = (f(x)^{f(y)})^{f(z)} = f(x^y)^{f(z)} = f((x^y)^z)$$
$$= f(x^{yz}) = f(x)^{f(yz)}.$$

Eğer, herhangi bir $x \in \mathbf{S}$ için $f(x) \neq 1$ ise, yukardaki eşitlikten, her y ve z için,

$$f(yz) = f(y)f(z)$$

çıkar. Bundan da kolaylıkla, her $x, y \in \mathbf{S}$ için, $f(x^n) = f(x)^n$ eşitliği çıkar. Demek ki,

$$f(x)^{f(n)} = f(x^n) = f(x)^n.$$

Dolayısıyla, eğer belli bir $x \in \mathbf{S}$ için $f(x) \neq 1$ ise, her $n \in \mathbf{S}$ için, $f(n) = n$ dir, yani $f = \mathrm{Id}_\mathbf{S}$ dir.

Sonuç olarak, yukardaki koşulu sağlayan iki fonksiyon vardır:

1) Her n için $f(n) = 1$ ve

2) Her n için $f(n) = n$. ♥