# $S_n$'de Eşleniklik Sınıfları

Özer Çözer

Bir önceki sayının "$S_n$ ya da namı diğer Sym($n$)" adlı yazısında (2003-I, sayfa 21-24) birkaç soru sorulmuştu. Bu soruların yanıtlarını, hatta olası yanıtların zorluk derecesini bilmediğini yazar açıkça itiraf etmişti. Anlaşılan o ki, o yazıda sorulan sorular, yazarın yazıyı yazarken aklına takıldığı sorulardı ve yazar yazmaktan düşünmeye pek zaman bulamamıştı... Sorulardan biri pek zor değilmiş. Kolay biraz hesapla çıkıyor (Teorem 1.) Sorulan ikinci bir soru da zor değilmiş ama ne yazık ki bulduğumuz çözüm bu derginin seslendiği genel okur kitlesinin bilgi düzeyini biraz aşıyor (Teorem 2). Sorulan üçüncü sorunun yanıtını ben de bilmiyorum.

**Teorem 1.** *Eğer $n \geq 4$ ise*, (12)'*nin eşleniklik sınıfı* $S_n$'*nin en az elemanlı eşleniklik sınıfıdır* (Id'*in sınıfı dışında elbet*).

**Kanıtlama Yöntemi.** $\mathrm{Id} \neq \sigma \in S_n$ olsun. $\sigma$'nın eşleniklik sınıfının eleman sayısını $[\sigma]$ olarak gösterelim. $\sigma$'yı ayrık devirlerine ayırıp, uzunluğu $r$ olan devirlerini, adına $\sigma_r$ diyeceğimiz bir elemanda toparlayalım. Örneğin $\sigma = (12)(34)(5678)$ ise $\sigma_2 = (12)(34)$, $\sigma_3 = \mathrm{Id}$, $\sigma_4 = (5678)$.

Demek ki her $\sigma_r$ uzunluğu $r$ olan ayrık devirlerin çarpımı ve $\sigma$, değişik $r$'ler için bu $\sigma_r$'lerin çarpımı. Eğer $\sigma_r \neq \mathrm{Id}$ ise, $[\sigma_r] \leq [\sigma]$ eşitsizliği bariz. Demek ki $[(12)] \leq [\sigma_r]$ eşitsizliğini kanıtlamak yeterli.

Bundan böyle, $\sigma$, uzunluğu $r$ olan $k$ ayrık devirin çarpımı olsun. Demek ki $kr \leq n$. Ayrıca $2 \leq r$. Bu bilgiler daha sonra gerekecek. Şimdi $\tau = (1\ 2\ \ldots\ r)$ olsun. Önce $[\tau] \leq [\sigma]$ eşitsizliğini kanıtlayacağız. Her iki sayıyı da açık açık bulabiliriz:

$$[\tau] = \binom{n}{r}(r-1)!$$

$$[\sigma] = \binom{n}{r}\binom{n-r}{r}\cdots\binom{n-kr+r}{r}\frac{((r-1)!)^k}{k!}$$

Bundan sonra $[\tau] \leq [\sigma]$ eşitsizliğini $k$ ve $n$ üzerine tümevarımla kanıtlamak kolay. (Alttaki sayı sadeleşiyor.)

Demek ki $[(12)] \leq [\tau]$ eşitliğini, yani

$$\binom{n}{2} \leq \binom{n}{r}(r-1)!$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerekiyor. Bu da kolay (tümevarımla). Teorem böylece kanıtlanmıştır.

**Teorem 2.** $(12\ldots\ n)$'*nin eşleniklik sınıfı* $S_n$'*nin en fazla elemanlı eşleniklik sınıfıdır*.

**Kanıt:** Bunun kanıtı yukardakinden daha zor. Biraz soyut cebir bilgisi gerekiyor. Dolayısıyla liseli okurlarımıza göre değil aşağıdaki açıklamalar.

$\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_k$ ise ve $\sigma_i$'ler herbirinin uzunluğu $r$ olan ayrık devirlerse, $C_{S_n}(\sigma)$ altgrubunu ($\sigma$'nın merkezleyicisi) bulmak oldukça kolaydır. Bu grup doğal bir biçimde $((\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^k \rtimes S_k) \times S_{n-kr}$ grubuna izomorftur. Baştaki $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$'ler $\sigma_i$'ler tarafından gerilmiştir, $S_k$ grubunun $\{\sigma_1,\ldots, \sigma_k\}$ kümesi üzerine doğal permütasyon etkisi vardır, en sondaki $S_{n-kr}$ de $\sigma$'nın yerini değiştirmediği $n - kr$ noktanın tüm permütasyonlarıdır. Bu söylediklerimizden yararlanılarak, $S_n$'nin herhangi bir elemanının merkezleyicisi kolaylıkla bulunur.

Şimdi $\sigma \in S_n$ olsun. $[\sigma] \leq [(12\ldots n)]$ eşitsizliği $|C_{S_n}(\sigma)| \geq |C_{S_n}(12\ldots n)|$ eşitsizliğine eşdeğerdir. Sağdaki altgrubun tam $n$ elemanı vardır (eşleniklik sınıfının eleman sayısını biliyoruz.) Demek ki $|C_{S_n}(\sigma)| \geq n$ eşitsizliğini kanıtlamamız gerekiyor. $\sigma$'yı ayrık devirlerine ayıralım. Buna uzunluğu 1 olan devirleri de ekleyelim. Elde ettiğimiz uzunluklara $r_1, \ldots, r_t$ diyelim. Ve $r_i$ uzunluğunda $k_i$ devir olsun. Demek ki $\sum_{i=1}^t r_i k_i = n$ ve $r_i$'ler birbirinden değişik. Bir üstteki paragrafta söylenenlerden $C_{S_n}(\sigma)$ altgrubunu bulabiliriz. Kolayca görüleceği üzere bu altgrubun $\prod_{i=1}^t r_i^{k_i} k_i!$ tane elemanı vardır. Demek ki $\sum_{i=1}^t r_i k_i = n$ ise ve $r_i$'ler birbirinden değişik ise $\prod_{i=1}^t r_i^{k_i} k_i! \geq n$ eşitsizliğini kanıtlamak gerekiyor. Yani, $r_i$'ler birbirinden değişik ise, $\prod_{i=1}^t r_i^{k_i} k_i! \geq \sum_{i=1}^t r_i k_i$ eşitliğini kanıtlamak gerekiyor. Bu eşitlik $t$ üzerinden tümevarımla kolaylıkla kanıtlanabilir. Teoremimiz kanıtlanmıştır.

**Üçüncü Soru.** $d(n)$, $S_n$'deki elemanların en büyük derecesi (mertebesi) olsun. $d(n)$ fonksiyonu $n$'ye göre nasıl artıyor? Her $n$ için $d(n) \leq Cn^k$ eşitsizliğini sağlayan bir $C$ ve $k$ var mı? Geçen sayıda bu soru da sorulmuştu. Bilmiyorum, ama bir bilen vardır mutlaka. Bilen varsa söylesin, ben de merak ettim.